§8 積分の定義と基本性質　演習問題 1　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(定義から計算①)

積分の定義にしたがって，定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ を求めよ．

解 $f(x) := x$ とおく．区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分して，分点を

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \quad x_k := \frac{k}{n} \ \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

とおく．小区間 $I_k := \{x : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$ は長さ $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$ の区間であり，I_k 内の代表点として $\xi_k = x_k$ をとると，定積分の定義により

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

∎

2 (★★☆)(定義から計算②)

次の各問いに答えよ．

(1) 積 ↔ 和の公式を用いて，

$$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \sin\frac{n+1}{2}\theta\,\sin\frac{n}{2}\theta$$

であることを示せ．

(2) 積分の定義にしたがって，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ を求めよ．

解 (1) 積 $\leftrightarrow$ 和の公式を用いて，

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta &= \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{1}{2}\theta-\cancel{\cos\frac{3}{2}\theta}\right)+\left(\cancel{\cos\frac{3}{2}\theta}-\cancel{\cos\frac{5}{2}\theta}\right)\right. \\
&\qquad\left.+\cdots+\left(\cancel{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) \\
&= -\sin\frac{\frac{1}{2}\theta+(n+\frac{1}{2})\theta}{2}\sin\frac{\frac{1}{2}\theta-(n+\frac{1}{2})\theta}{2}=\sin\frac{n+1}{2}\theta\,\sin\frac{n}{2}\theta.
\end{aligned}$$

(2) $g(x):=\sin x$ とおく．区間 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ を n 等分して，分点を

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=\frac{\pi}{2},\quad x_k:=\frac{\pi k}{2n}\ (k=0,1,\ldots,n)$$

とおく．小区間 $J_k:=\{x: x_{k-1}\leqq x\leqq x_k\}$ は長さ $\Delta x_k=\dfrac{\pi}{2n}$ の区間であり，J_k 内の代表点として $\xi_k=x_k$ をとると，定積分の定義により

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g(x_k)\,\frac{\pi}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right).
\end{aligned}$$

ここで (1) を $\theta=\dfrac{\pi}{2n}$ として適用すると

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}k\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\,\sin\left(\frac{n+1}{4n}\pi\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx &= \lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\,\sin\frac{\pi}{4}\,\sin\left(\frac{n+1}{4n}\pi\right) \\
&= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

ただし，最後の行で $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ であることを用いた． ∎

3 **(★☆★)(区分求積法①)**

区分求積法を用いて，次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$.

解 (1) 区分求積法により，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\\ &= \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \boldsymbol{\log 2}.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle S_n := \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\log S_n &= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &\to \int_0^1\log(1+x)\,dx \quad (n\to\infty)\\ &= \Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1 = 2\log 2-1 = \log\frac{4}{e}.\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}e^{\log S_n} = e^{\log\frac{4}{e}} = \boldsymbol{\frac{4}{e}}.$$

(3) $\displaystyle T_n := \left\{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\log S_n &= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)+\log\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$\to \int_0^1 \log(1+x^2)\,dx \quad (n\to\infty)$$

$$= \Big[x\log(1+x^x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \log 2 - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \log 2 - 2\Big[x - \operatorname{Arctan} x\Big]_0^1 = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

ゆえに,

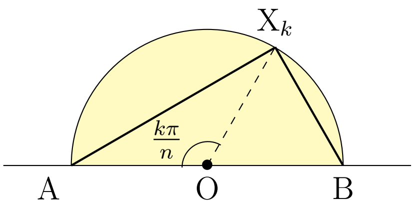
$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} e^{\log T_n} = e^{\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{2e^{\frac{\pi}{2}-2}}.$$

∎

4 (★★☆)(区分求積法②)

$\mathrm{AB}=2a$ を直径とする半円周を $\mathrm{A}=\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n=\mathrm{B}$ で n 等分して，$\triangle\mathrm{AX}_k\mathrm{B}$ の面積を S_k とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$ を求めよ．

解 円周角の定理より $\triangle\mathrm{AX}_k\mathrm{B}$ は，$\angle\mathrm{AX}_k\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であることに注意する．X_k は半円周 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を n 等分するので，$\angle\mathrm{AOX}_k=\dfrac{k\pi}{n}$ だから，



$$S_k = 2\triangle\mathrm{AOX}_k = a^2\sin\frac{k\pi}{n}.$$

したがって,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$= a^2\int_0^1 \sin\pi x\,dx$$

$$= a^2\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2a^2}{\pi}}.$$

∎