# ロピタルの定理　演習問題１　解答

**問 1.** 次の極限を求めよ.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$　　(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$　　(vi) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(-x\log x)$

**解答.** まず，（よく使う形の）ロピタルの定理を復習しておく.

**定理.** $a\in\mathbb{R}$ とする.

(1) 関数 $f$, $g$ は点 $a$ の周り[*1]で微分可能かつ $g'(x)\neq 0$ で，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ をみたすとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ が成り立つならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

が成り立つ.

(2) 関数 $f$, $g$ は点 $a$ の周りで微分可能かつ $g'(x)\neq 0$ で，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ をみたすとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ が成り立つならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

が成り立つ.

(1), (2) は，$x\to a+0$, $x\to a-0$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ の場合や，$L=\infty$, $L=-\infty$ の場合でも成立する（例えば $a=\infty$ の場合は，「$f$, $g$ は十分大きな $x$ において微分可能で $\cdots$」という仮定になる）．形式的に $\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ となっている不定形の関数の極限を求める際に有効な定理である．多くの本においてロピタルの定理を用いた演習問題の解答は，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ の存在がわかっていないにも関わらず

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots$$

と書き始められている（または省略されている）が，厳密には極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在（もしくは $\pm\infty$ に発散）することが示されてはじめて極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在（もしくは $\pm\infty$ に発散）することが示されることを理解しておくべきである．以下では比較的丁寧に解答を与えた.

(i) $f(x)=2x^2-5x+2$, $g(x)=x^2-4$ とおく．$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$ を求めればよい．$f$, $g$ はともに $x=2$ の周りで微分可能かつ $g'(x)=2x\neq 0$ で，$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}g(x)=0$ が成立する.

[*1] 「周り」と曖昧に述べているが，正確には「ある $\delta>0$ が存在して，$x\neq a$, $|x-a|<\delta$ なる $x$ において $\cdots$」

また，

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x-5}{2x} \to \frac{3}{4} \quad (x \to 2)$$

とわかるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{4}$$

■

(ii) $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$, $g(x) = x - 2$ とおく．$\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ を求めればよい．$f$, $g$ はともに $x = 2$ の周りで微分可能かつ $g'(x) = 1 \neq 0$ で，$\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 0$ が成り立つ．また，

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{1} \to \frac{1}{4} \quad (x \to 2)$$

とわかるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}$$

■

**注意.** (ii) は

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \to \frac{1}{4} \quad (x \to 2)$$

と求めてももちろんよい．

(iii) $f(x) = 2^x - 3^x$, $g(x) = x$ とおく．$\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ を求めればよい．$f$, $g$ はともに $x = 0$ の周りで微分可能かつ $g'(x) = 1 \neq 0$ で，$\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 0$ となる．また，

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2^x \log 2 - 3^x \log 3}{1} \to \log 2 - \log 3 \quad (x \to 0)$$

とわかるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \log 2 - \log 3.$$

■

**注意.** $f$ は $x = 0$ でも微分可能であるから，そもそも微分の定義より

$$\frac{2^x - 3^x}{x} = \frac{f(x) - 0}{x - 0} \to f'(0) = \log 2 - \log 3 \quad (x \to 0)$$

となるはずである．また，底が $e$ ではない指数関数の微分は慣れていないかもしれないが，指数・対数関数の定義と基本性質に立ち戻って合成関数の微分を用いれば

$$(a^x)' = (e^{\log a^x})' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \log a = e^{\log a^x} \log a = a^x \log a$$

とすぐに思い出せる．

(iv) $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x^3$ とおく．このとき $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ を求めればよい．$f$, $g$ はともに $x = 0$ の周りで微分可能かつ $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ で，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ が成り立つ．また，$f'(x) = 1 - \cos x$, $g'(x) = 3x^2$ であって，$f'$, $g'$ ともに $x = 0$ の周りで微分可能かつ $g''(x) = 6x \neq 0$，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ が成立する．このとき

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sin x}{x} \to \frac{1}{6} \quad (x \to 0)$$

とわかるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{6}.$$

再びロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{6}.$$

■

**注意．** $x \to a$ のとき $f(x)/g(x)$ が不定形となる極限をロピタルの定理を用いて求めようとすると，$x \to a$ のとき $f'(x)/g'(x)$ も不定形となる場合がある．その場合は (iv) の解答のようにロピタルの定理を繰り返し適用できるかどうか確認するとよい．

(v) 十分大きな $x$ に対して

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \frac{x}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

となることに注意すると，$f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2+x} + x$ とおいたとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ を求めればよいことがわかる．$f$, $g$ ともに十分大きな $x$ において微分可能かつ

$$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + 1 \neq 0$$

で，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ である．また，

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}+1} = \frac{1}{\dfrac{2+1/x}{2\sqrt{1+1/x}}+1} \to \frac{1}{2} \quad (x \to \infty)$$

とわかる．ここで，十分大きな $x$ については $x = \sqrt{x^2}$ であることを用いた．よってロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}.$$

■

**注意．** (v) のように形式的に “$\infty - \infty$”の不定形の極限も変形することでロピタルの定理が使える場合がある．ただし，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} \to \frac{1}{2} \quad (x \to \infty)\end{aligned}$$

と求めることもできる．具体的な不定形の極限を求める際は，まずは極限が容易に判定できる形へ変形できないか考えたあと，できない場合はロピタルの定理を使うという姿勢がいいと思う．

(vi) 十分小さな正の $x$ に対して

$$-x\log x = \frac{-\log x}{\dfrac{1}{x}}$$

である．$f(x) = -\log x$, $g(x) = 1/x$ とおくと，ともに $x = 0$ の周りで微分可能かつ $g'(x) = -1/x^2 \neq 0$ で，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} g(x) = \infty$ である．さらに

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = x \to 0 \quad (x \to +0)$$

とわかるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

■

**注意.** (vi) は，形式的に $0 \cdot (-\infty)$ の極限を求める問題であるが，変形してロピタルの定理が適用できる形にした．

**問 2.** 以下の問に答えよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \log(\tan x)^{\cos x}$ を求めよ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\tan x)^{\cos x}$ を求めよ．

**解答.** (i) $0 < x < \pi/2$ をみたす $x$ に対して

$$\log(\tan x)^{\cos x} = (\cos x)\log(\tan x) = \frac{\log(\tan x)}{\dfrac{1}{\cos x}}$$

が成り立つ．関数 $\log(\tan x)$, $1/\cos x$ ともに $x = \pi/2$ の近くで微分可能で

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \neq 0$$

であり，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \log(\tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\cos x} = \infty$$

である．さらに

$$\frac{(\log(\tan x))'}{\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'} = \frac{\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{(\tan x)\cdot(\sin x)} \to 0 \quad \left(x \to \frac{\pi}{2} - 0\right)$$

とわかる．よってロピタルの定理により

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\log(\tan x)^{\cos x}=0.$$

■

(ii) 対数関数の定義と指数関数の連続性，加えて (i) の結果から

$$(\tan x)^{\cos x}=e^{\log(\tan x)^{\cos x}}\to e^{0}=1\quad\left(x\to\frac{\pi}{2}-0\right)$$

とわかる． ■

**注意．** 本問題のように形式的に $\infty^0$ となる極限は，対数をとることでロピタルの定理が適用できる場合がある．