Taylor の定理の応用　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$　Taylor の定理は

(a) $$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

と表される。ここで c は a と x の間の数である。(a) の左の式の右辺は多項式 + 誤差項と読める。つまり Taylor の定理は，難しい関数 $f(x)$ を近似する近似多項式の作り方と，そのときの誤差の表現を与えているのである。誤差項 R_n を見ると，誤差を小さくするには a を x に近く取り，そして n を大きく取ればよいことがわかる。また近似多項式を作るには，$f^{(i)}(a)$ を具体的に求めないといけないので，a はそのように選ぶ必要もある。

(1) $\sqrt{1.04}$ の値を小数第 4 位まで求めよ。

[解] $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ とおくと，標記の値は $f(0.04)$ である。0.04 は 0 に近いので，$f(x)$ の 0 における Taylor 展開を用いる。

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$$

となるが，$x = 0.04$ を入れたとき x^3 は 10^{-5} 程度の値になると考えられるので，近似多項式としては 2 次多項式を採用することにして

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_3$$

を使おう。まず近似多項式の値を計算する。

$$1 + \frac{0.04}{2} - \frac{0.04^2}{8} = 1.0198$$

次に誤差の評価を行う。

$$R_3 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8}(1+c)^{-\frac{5}{2}} \cdot 0.04^3$$

ここで c は $0 < c < 0.04$ をみたす。まず $R_3 > 0$ がわかる。次に $c > 0$ より $1 + c > 1$，すると $(1+c)^{\frac{5}{2}} > 1$ だから

$$(1+c)^{-\frac{5}{2}} < 1$$

が成り立つ。これを用いると

$$0 < R_3 < \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot 0.04^3 = \frac{1}{16} \cdot 4^3 \times 10^{-6} = 4 \times 10^{-6}$$

したがって

$$1.0198 < f(0.04) < 1.0198 + 4 \times 10^{-6}$$

が得られる。小数第 4 位まで求めたいので，

$$\sqrt{1.04} = 1.0198$$

となる。

(2) $\sin 1^\circ$ の値を小数第 5 位まで求めよ。

[解] $f(x) = \sin x$ とおくと，標記の値は $f(1^\circ)$ である。このあと $\sin x$ の Taylor 展開を使うのであるが，Taylor 展開は関数を微分して得られる。そして $(\sin x)' = \cos x$ といった公式は，x をラジアンで表したときに成り立つのであった。したがって $\sin x$ の Taylor 展開を使って値を求める場合には，変数は度ではなくラジアンで表しておかなければならない。

1° をラジアンで表すと，
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.017453\cdots$$
となる。この値は 0 に近いので，$f(x)$ の 0 における Taylor 展開を用いる。
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$
となるが，$x = 0.017453\cdots$ はおよそ 0.02 程度で，x^3 は 10^{-6} 程度と見積もれるので，
$$f(x) = x + R_3$$
を使うことにする。まず近似多項式 x の値は $0.017453\cdots$ そのものである。誤差の評価を行う。
$$R_3 = -\frac{\cos c}{3!} \cdot (0.017453\cdots)^3$$
ここで c は 0 と $0.017453\cdots$ の間の数。まず $R_3 < 0$ がわかる。また $|\cos c| \leqq 1$ であるから，
$$|R_3| \leqq \frac{(0.017453\cdots)^3}{3!} < \frac{0.018^3}{6} < \frac{18 \times 10^{-3}}{6} \times 0.02^2 = 1.2 \times 10^{-6}$$
という評価が得られた。すなわち
$$-1.2 \times 10^{-6} < R_3 < 0$$
となるので，これより
$$0.017451 < \sin 1^\circ < 0.017454$$
が成り立つことがわかる。小数第 5 位まで求めるのであったから，
$$\sin 1^\circ = 0.01745$$
となる。