§5 高階導関数と Taylor の定理　演習問題 2

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(**Leibniz の公式 1**)

$f(x) := \mathrm{Arctan}\, x$ に対して，

(1) $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$ を示せ．

(2) $f^{(n)}(0)$ の値を求めよ．

2 (★☆☆)(**Leibniz の公式 2**)

$P_n(x) := \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ を **Legendre**（ルジャンドル）**多項式**という．$P_n(x)$ は微分方程式

$$(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

をみたすことを示せ．

3 (★★★)(**Leibniz の公式 3**)

f は C^∞ 級であるとする．帰納法により次式を示せ．

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4 (★★☆)(**Taylor の定理の応用**)

多項式 $f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ が $x = a$ において

$$f(a) \geqq 0, \quad f'(a) \geqq 0, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(a) \geqq 0$$

をみたすとき，方程式 $f(x) = 0$ は a よりも大きな解を持たないことを示せ．ただし $a_0 \neq 0$ とする．