Taylor の定理，Taylor 展開

$\boxed{\mathbf{1}}$ Taylor の定理を用いて解答せよ。

(1) $x > 0$ に対して，不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

を示せ。

(2) $x > 0$ に対して，不等式

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

を示せ。

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，不等式

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

を示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 指定された点における Taylor 展開を求めよ。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $(x = 0$ において$)$

(2) $f(x) = (1+x)^a$ $(x = 0$ において$)$

(3) $f(x) = \sin x$ $(x = 0$ において$)$

(4) $f(x) = \sin x$ $(x = \dfrac{\pi}{2}$ において$)$

(5) $f(x) = \log x$ $(x = 1$ において$)$

(6) $f(x) = e^{ax}$ $(x = 0$ において$)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 指定された点における Taylor 展開を求めよ。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$ $(x = 0$ において$)$

(2) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $(x = 0$ において$)$

(3) $f(x) = \sin x^2$ $(x = 0$ において$)$

(4) $f(x) = e^{x^2}$ $(x = 0$ において$)$