§5 高階導関数と Taylor の定理　演習問題 2　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(Leibniz の公式 1)

$f(x) := \mathrm{Arctan}\, x$ に対して，

(1) $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$ を示せ．

(2) $f^{(n)}(0)$ の値を求めよ．

解 (1) $f(x) := \mathrm{Arctan}\, x$ に対して，

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \iff (1+x^2)f'(x) = 1.$$

$(1+x^2)$ は 3 回以上微分すると消えるから，Leibniz の公式を用いてこの両辺を n 回微分すると

$$\binom{n}{0}(1+x^2)^{(0)}(f'(x))^{(n)} + \binom{n}{1}(1+x^2)^{(1)}(f'(x))^{(n-1)} + \binom{n}{2}(1+x^2)^{(2)}(f'(x))^{(n-2)} = 0,$$

ただし，$\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ は 2 項係数を表す．ゆえに，

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

この式で $x=0$ とすれば $f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0$ となり，所望の等式を得る．

(2) $a_n := f^{(n)}(0)$ とすると，(1) より $a_n = -n(n-1)a_{n-1}$ であり，$a_0 = f(0) = 0$ ゆえ偶数番目の項に関しては，$a_{2m} = 0 \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots)$ がわかる．また，$a_1 = f'(0) = 1$ だから，

$$\begin{aligned} a_{2m-1} &= -(2m-2)(2m-3)a_{2m-3} \\ &= [-(2m-2)(2m-3)]\,[-(2m-4)(2m-5)]\,a_{2m-5} \\ &= \cdots = (-1)^{m-1}(2m-2)!a_1 \\ &= (-1)^{m-1}(2m-2)! \ \ (m = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

したがって，

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{n}\text{ が偶数のとき} \\ \boldsymbol{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!} & \boldsymbol{n}\text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

■

2 (★☆☆)(Leibniz の公式 2)

$P_n(x) := \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n=0,1,2,\dots)$ を **Legendre**（ルジャンドル）**多項式**という．$P_n(x)$ は微分方程式

$$(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

をみたすことを示せ．

解 $\rho(x) := (x^2-1)^n$ とおく．$\rho'(x) = 2nx\,(x^2-1)^{n-1}$ であるから，$(x^2-1)\,\rho'(x) = 2nx\rho(x)$ が成り立つ．この両辺を Leibniz の公式を用いて $n+1$ 回微分すると，(x^2-1) は 3 回以上微分すると消えるから，$\boxed{1}$ と同様にして

$$\left(x^2-1\right)\rho^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x\rho^{(n+1)}(x) + (n+1)n\rho^{(n)}(x) = 2n\left(x\rho^{(n+1)}(x) + (n+1)\rho^{(n)}(x)\right).$$

を得る．すなわち，

$$\left(x^2-1\right)\rho^{(n+2)}(x) + 2x\rho^{(n+1)}(x) - n(n+1)\rho^{(n)}(x) = 0$$

$$\iff (x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0.$$

■

3 (★★★)(Leibniz の公式 3)

f は C^∞ 級であるとする．帰納法により次式を示せ．

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

解 n に関する帰納法で示そう．

・$n=1$ のとき：合成関数の微分則より

$$\frac{d^1}{dx^1}\left(x^0 f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)}{x^2}f^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

だから，$n=1$ のとき主張は成り立つ．

・ある n のとき：$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を仮定する．この両辺をさらに x で微分して，

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = (-1)^n\left\{-\frac{n+1}{x^{n+2}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^{n+1}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right\}$$
$$= (n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \cdots ①.$$

一方，積の微分則を使って，

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x\right)\\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x + x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x\right] + \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad \cdots ②.
\end{aligned}
$$

右辺第 1 項に関して，x を 2 回以上微分すると 0 になることに注意して，Leibniz の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x\right] &= \left[\frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\cdot x + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x + n\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)
\end{aligned}
$$

を得る．これを②に代入して，

$$
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right).
$$

したがって，帰納法の仮定と，①を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= x\left[\cancel{(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&\quad \cancel{+(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

となって，$n+1$ のときも成り立つことがわかる．以上よりすべての n で主張は成り立つ． ∎

4 (★★☆)(Taylor の定理の応用)

多項式 $f(x) := a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ が $x = a$ において

$$
f(a) \geqq 0, \quad f'(a) \geqq 0, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(a) \geqq 0
$$

をみたすとき，方程式 $f(x) = 0$ は a よりも大きな解を持たないことを示せ．ただし $a_0 \neq 0$ とする．

解 与えられた多項式 $f(x)$ は n 次であるから，$(n+1)$ 回以上微分すると消える．ゆえに，Taylor の定理より

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と表される．今，与えられた条件について，すべての $0\leqq k\leqq n$ に対して $f^{(k)}(a)=0$ であると仮定すると，$f(x)\equiv 0$ (恒等的に零) となって，$a_0\neq 0$ であることに矛盾する．したがって，$f^{(k_0)}(a)>0$ となる $0\leqq k_0\leqq n$ が存在する．このとき，$x>a$ であれば

$$f(x)\geqq\frac{f^{(k_0)}(a)}{k_0!}(x-a)^{k_0}>0$$

となって，これより $f(x)=0$ は a より大きな解を持たないことが示された． ∎