Taylor の定理，Taylor 展開　解答

1　Taylor の定理は

(a)
$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+R_n,\quad R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

と表される。ここで c は a と x の間の数である。

(1) $x>0$ に対して，不等式

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

を示せ。

[解] $f(x)=\log(1+x)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\ f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$$

である。これより

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=2$$

となる。Taylor の定理 (a) を $n=3$，$a=0$ として $f(x)$ に適用すると，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+R_3=x-\frac{x^2}{2}+R_3$$

となり，ここで

$$R_3=\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3=\frac{1}{3(1+c)^3}x^3$$

で，$x>0$ で c は 0 と x の間の数なので $c>0$ だから，$R_3>0$ となる。したがって

$$f(x)>x-\frac{x^2}{2}$$

が得られる。次に (a) を $n=4$，$a=0$ として適用すると，

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_4$$

となるが，ここで

$$R_4=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-a)^4=-\frac{1}{4(1+c)^4}x^4$$

だから $R_4<0$ となる。したがって

$$f(x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

が得られる。こうして標記の不等式が得られた。□

(2) $x>0$ に対して，不等式

$$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}<e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

を示せ。

[解] $f(x)=e^{-x}$ とおくと

$$f'(x)=-e^{-x},\ f''(x)=e^{-x},\ f'''(x)=-e^{-x}, f^{(4)}(x)=e^{-x},\ f^{(5)}(x)=-e^{-x}$$

となり，これより

$$f(0)=1,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=1$$

となる。$f(x)$ に対して Taylor の定理 (a) を $n=4$, $a=0$ として適用すると，

$$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+R_4,\quad R_4=\frac{e^{-c}}{4!}x^4>0$$

となるので，これより

$$f(x)>1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$$

が得られる。また (a) を $n=5$ として適用すると，

$$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+R_5,\quad R_5=-\frac{e^{-c}}{5!}x^5<0$$

となるので，これより

$$f(x)<1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

が得られる。こうして標記の不等式が得られた。□

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，不等式

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

を示せ。

[解] $f(x)=\cos x$ とおくと

$$f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x,\ f^{(4)}(x)=\cos x$$

となり，$f^{(4)}(x)=f(x)$ となったので 5 階微分以上はこれを繰り返す。$f(x)$ に対して Taylor の定理 (a) を $n=4$, $a=0$ として適用すると，

$$f(x)=1+0x-\frac{x^2}{2}+\frac{0}{3!}x^3+R_4,\quad R_4=\frac{\cos c}{4!}x^4>0$$

となるので，これより

$$f(x)>1-\frac{x^2}{2}$$

を得る。また (1) を $n=6,\ a=0$ として適用すると，

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{0}{5!}x^5+R_6,\quad R_6=-\frac{\cos c}{6!}x^6<0$$

となるので，これより

$$f(x)<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

が得られる。こうして標記の不等式が得られた。□

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x)$ の $x=a$ における Taylor 展開は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

で与えられる。よって Taylor 展開を求めるには，各 n に対する $f^{(n)}(a)$ の値を求めればよい。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}\quad(x=0$ において$)$

[解]

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1-x)^{-1} & f(0)&=1\\
f'(x)&=(1-x)^{-2} & f'(0)&=1\\
f''(x)&=2(1-x)^{-3} & f''(0)&=2\\
f'''(x)&=3!(1-x)^{-4} & f'''(0)&=3!
\end{aligned}$$

この計算を見ると，

$$f^{(n)}(x)=n!(x-1)^{-n-1},\ f^{(n)}(0)=n!$$

となることがわかる。したがって

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

が得られる。□

(2) $f(x)=(1+x)^a\quad(x=0$ において$)$

[解]

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+x)^a & f(0)&=1\\
f'(x)&=a(1+x)^{a-1} & f'(0)&=a\\
f''(x)&=a(a-1)(1+x)^{a-2} & f''(0)&=a(a-1)\\
f'''(x)&=a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} & f'''(0)&=a(a-1)(a-2)
\end{aligned}$$

この計算を見ると，

$$f^{(n)}(x)=a(a-1)\cdots(a-n+1)(x+1)^{a-n},\ f^{(n)}(0)=a(a-1)\cdots(a-n+1)$$

$(n\geqq 1)$ となることがわかる。したがって

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$$

が得られる。□

(3) $f(x) = \sin x \quad (x = 0$ において)

[解]

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

であり，もう 1 回微分すると $f^{(4)}(x) = \sin x$ となって $f(x)$ に戻る。したがって $x = 0$ における値は $0, 1, 0, -1$ がこの順に無限に繰り返す。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \end{aligned}$$

が得られる。

(4) $f(x) = \sin x \quad (x = \dfrac{\pi}{2}$ において)

[解] 同じ関数なので値だけを記載すると，

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -1,\ f'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

で，この値 $1, 0, -1, 0$ がこの順に無限に繰り返すことがわかる。したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^{2m} \end{aligned}$$

が得られる。□

(5) $f(x) = \log x \quad (x = 1$ において)

[解]

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & f'''(0) &= 2 \end{aligned}$$

この計算を見ると

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n},\ f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$(n \geqq 1)$ となることがわかる。したがって

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

が得られる。□

(6) $f(x) = e^{ax} \quad (x = 0$ において$)$

[解]

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= ae^{ax} & f'(0) &= a \\ f''(x) &= a^2 e^{ax} & f''(0) &= a^2 \end{aligned}$$

この計算を見ると

$$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax},\ f^{(n)}(0) = a^n$$

となることがわかる。したがって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$$

が得られる。□

$\boxed{\mathbf{3}}$ 前問の Taylor 展開の結果を用いる。関数 $f(x)$ と点 a に対して，a における $f(x)$ の Taylor 展開は一意的なので，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

という形の展開が（どのような方法にせよ）得られたなら，それが Taylor 展開である。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^3} \quad (x = 0$ において$)$

[解] 前問 (1) で x のところを x^3 で置き換えた関数であるから，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$$

が求める Taylor 展開である。□

(2) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \quad (x = 0$ において$)$

[解] 前問 (2) で $a = \frac{1}{2}$ とし x に x^2 を代入した関数であるから，

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} x^{2n}$$

が求める Taylor 展開である。□

(3) $f(x) = \sin x^2 \quad (x = 0$ において$)$

[解] 前問 (3) で x に x^2 を代入した関数であるから，

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2(2m+1)}$$

が求める Taylor 展開である。□

(4) $f(x) = e^{x^2} \quad (x = 0$ において$)$

[解] 前問 (6) で $a = 1$ とし x に x^2 を代入した関数であるから,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$$

が求める Taylor 展開である。□