§4 平均値の定理とその応用　演習問題 3　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(不等式の証明①)

$\varphi(x)$ はすべての実数 x で微分可能で，$\varphi(0)=0$ かつ，すべての $x \geqq 0$ に対して $\varphi(x) \geqq x$ を満たしている．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，$0<t<\varepsilon$ をみたす t で $\varphi'(t) \geqq 1$ となるものが存在することを示せ．

解　**【解 1】(平均値の定理)**　$\varepsilon>0$ を任意にとる．平均値の定理により

$$\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}=\varphi'(t) \quad \cdots ①$$

となる $0<t<\varepsilon$ が存在する．$x \geqq 0$ に対して $\varphi(x) \geqq x$ を満たすから，$\varphi(\varepsilon) \geqq \varepsilon$ も成立する．よって，$\varphi(0)=0$ に注意すると，①より

$$\varphi'(t)=\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}=\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \geqq 1$$

となり，所望の評価式を得る．

【解 2】(背理法)　$0<t<\varepsilon$ をみたす t で $\varphi'(t) \geqq 1$ となるものが存在しないと仮定すると，任意の $t \in (0,\varepsilon)$ に対して $\varphi'(t)<1$．よって $\varphi(0)=0$ に注意して，両辺 $(0,\varepsilon)$ で積分すると

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t < \int_0^{\varepsilon} \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \varphi(\varepsilon)<\varepsilon$$

となり，これはすべての $x \geqq 0$ に対して $\varphi(x) \geqq x$ であることに矛盾する．　∎

2 (★★☆)(不等式の証明②)

任意の $x \geqq 0$ に対して，

$$1+x \leqq \frac{e}{e-1}\left(1+\int_0^x (1+t)^{-1} t\,\mathrm{d}t\right)$$

が成り立つことを示せ．

解　**【解 1】(平均値の定理)**

$$F(x):=\frac{e}{e-1}\left(1+\int_0^x (1+t)^{-1} t\,\mathrm{d}t\right)-(1+x), \quad x \geqq 0$$

とおく．

$$\int_0^{e-1}(1+t)^{-1}t\,\mathrm{d}t=\int_0^{e-1}\left(1-(1+t)^{-1}\right)\,\mathrm{d}t=\left[t-\log(1+t)\right]_{t=0}^{e-1}=e-2$$

であるから，$F(e-1)=0$ に注意．平均値の定理により

$$\frac{F(x)-F(e-1)}{x-(e-1)}=F'(\zeta)=\frac{e}{e-1}(1+\zeta)^{-1}\zeta-1$$

となる ζ が x と $e-1$ の間に存在する．

・$x>e-1$ のとき：$e-1<\zeta<x$ で，

$$\zeta>e-1 \iff \frac{e}{e-1}(1+\zeta)^{-1}>1$$

であるから，$F'(\zeta)>0$．ゆえに，$x>e-1$ に対し

$$F(x)=\underbrace{\left[x-(e-1)\right]}_{>0}\underbrace{F'(\zeta)}_{>0}>0.$$

・$x<e-1$ のとき：$x<\zeta<e-1$ で，

$$\zeta<e-1 \iff \frac{e}{e-1}(1+\zeta)^{-1}<1$$

であるから，$F'(\zeta)<0$．ゆえに，$x<e-1$ に対し

$$F(x)=\underbrace{\left[x-(e-1)\right]}_{<0}\underbrace{F'(\zeta)}_{<0}>0.$$

以上よりすべての $x\geqq 0$ に対して，$F(x)\geqq 0$.

【解 2】(直接的に)　右辺の積分の計算を実行する．

$$\int_0^{x}(1+t)^{-1}t\,\mathrm{d}t=\int_0^{x}\left(1-(1+t)^{-1}\right)\,\mathrm{d}t=x-\log(1+x)$$

であるから，示すべき不等式は

$$1+x\leqq\frac{e}{e-1}\left(1+x-\log(1+x)\right)$$

$$\iff \frac{\log(1+x)}{1+x}\leqq\frac{1}{e}$$

である．$f(x):=\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$,　$x>0$ とおくと，$f(x)>0$ かつ $f'(x)=\frac{1-\log(1+x)}{(1+x)^2}$ であるから，$x=e-1$ のとき $f(x)$ は最大値をとる．ゆえに，

$$f(x)=\frac{\log(1+x)}{1+x}\leqq f(e-1)=\frac{1}{e}.$$

■

3 (★★★)(不等式の証明③)

$p>1$ とする．任意の $x \geqq 0$ に対して，

$$(1+x)^p \leqq \gamma_p \left(1+\int_0^x (1+t)^{p-2} t \, \mathrm{d}t\right), \qquad \gamma_p := \frac{p}{1-(1+p(p-1))^{\frac{1}{1-p}}}$$

が成り立つことを示せ．さらに，$\displaystyle\lim_{p\to 1} \gamma_p = \frac{e}{e-1}$ であることを示せ．

解 *右辺の積分項について，

$$\begin{aligned}
\int_0^x (1+t)^{p-2} t \, \mathrm{d}t &= \int_0^x (1+t)^{p-2} \Big((1+t)-1\Big) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x (1+t)^{p-1} \, \mathrm{d}t - \int_0^x (1+t)^{p-2} \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{p}(1+t)^p\right]_{t=0}^x - \left[\frac{1}{p-1}(1+t)^{p-1}\right]_{t=0}^x \\
&= \frac{1}{p}(1+x)^p - \frac{1}{p-1}(1+x)^{p-1} + \frac{1}{p(p-1)}.
\end{aligned}$$

したがって，示すべき不等式は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma_p}(1+x)^p \leqq 1 + \frac{1}{p}(1+x)^p - \frac{1}{p-1}(1+x)^{p-1} + \frac{1}{p(p-1)} \\
\iff\ &\underbrace{\frac{1}{p-1}(1+x)^{p-1} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma_p}\right)(1+x)^p}_{=:g(x)} \leqq 1 + \frac{1}{p(p-1)} \qquad \cdots ①
\end{aligned}$$

となる．以下，$g(x)$ $(x \geqq 0)$ の最大値を求める．

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (1+x)^{p-2} - \left(1 - \frac{p}{\gamma_p}\right)(1+x)^{p-1} \\
&= (1+x)^{p-2}\left[1 - \frac{\gamma_p - p}{\gamma_p}(1+x)\right].
\end{aligned}$$

ここで $\gamma_p \leqq p \iff \frac{\gamma_p - p}{\gamma_p} \leqq 0$ の場合，$g'(x) \geqq 0$ となるから，$g(x)$ は単調増加．したがって $x \to \infty$ のとき $g(x) \to \infty$ となって①は成立しない．ゆえに，$\gamma_p < p$ のもとで考える．上の式から，$g'(x) = 0 \iff x = \frac{p}{\gamma_p - p} > 0$ であり，この点で極大かつ最大となる．ゆえに

$$g(x) = \frac{1}{p-1}(1+x)^{p-1} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma_p}\right)(1+x)^p \leqq g\left(\frac{p}{\gamma_p - p}\right) = \left(\frac{\gamma_p}{\gamma_p - p}\right)^{p-1} \frac{1}{p(p-1)}.$$

*Eleuteri-Marcellini-Mascolo の不等式 (2017) から引用．

最後に定数 γ_p を

$$\left(\frac{\gamma_p}{\gamma_p - p}\right)^{p-1} \frac{1}{p(p-1)} = 1 + \frac{1}{p(p-1)}$$
$$\iff \gamma_p = \frac{p}{1 - (1 + p(p-1))^{\frac{1}{1-p}}}$$

となるように選ぶことにより，①はすべての $x \geqq 0$ に対して成立する．

また，微分の定義と $\exp x := e^x$ と書くことにすると

$$\begin{aligned}
(1 + p(p-1))^{\frac{1}{1-p}} &= \exp\left[\log(1 + p(p-1))^{\frac{1}{1-p}}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{\log(1 + p(p-1)) - \log(1 + 1\cdot(1-1))}{p-1}\right] \\
&\xrightarrow[p\to 1]{} \exp\left[-\frac{d}{dp}\log(1 + p(p-1))\bigg|_{p=1}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{2p-1}{1+p(p-1)}\bigg|_{p=1}\right] = \exp(-1) = e^{-1}.
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\lim_{p\to 1}\gamma_p = \lim_{p\to 1}\frac{p}{1 - (1 + p(p-1))^{\frac{1}{1-p}}} = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

∎

4 (★☆☆)(極限への応用)

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ を求めよ．

解 **【解 1】(平均値の定理経由)** 平均値の定理より

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^\xi$$

となる ξ が x と $\sin x$ の間に存在する．よって $x \to 0 \iff \zeta \to 0$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{\xi\to 0} e^\xi = \mathbf{1}.$$

【解 2】(もっと直接的に) $x - \sin x =: u$ とおくと，$x \to 0 \iff u \to 0$ だから，

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^{\sin x}\cdot\frac{e^{x-\sin x} - 1}{x - \sin x} \overset{x-\sin x =: u}{=} e^{\sin x}\cdot\frac{e^u - 1}{u} \xrightarrow[x\to 0]{} e^0\cdot 1 = \mathbf{1}.$$

∎