§4 平均値の定理とその応用　演習問題 2　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(不等式の証明)

平均値の定理を用いて次の不等式を示せ：

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a < \frac{b-a}{1+a^2},$$

ただし，$0 < a < b$ とする．

解 $f(x) := \operatorname{Arctan} x$ とおく．$f(x)$ は微分可能である．区間 (a,b) に平均値の定理を適用すると，

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$$

をみたす $\xi \in (a,b)$ が存在する．$f'(\xi) = \dfrac{1}{1+x^2}$ であり，$0 < a < b$ に対して $\dfrac{1}{1+b^2} < f'(\xi) < \dfrac{1}{1+a^2}$ であるから，上式と合わせて，

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

∎

2 (★★☆)(極限の導出)

$f(x)$ は区間 I で C^2 級 (すなわち第 2 次導関数 f'' が存在して f'' が連続) であるとする．極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

を求めよ．

解 $h \neq 0$ を十分小さい数とし，関数 $g(x)$ を

$$g(x) := f(x+h) - f(x)$$

と定める．このとき，

$$\begin{aligned} f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) &= (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x)) \\ &= g(x+h) - g(x) \quad \cdots ①. \end{aligned}$$

$g(x)$ は微分可能であるから，平均値の定理より，ある $\theta \in (0,1)$ が存在して，

$$g(x+h) - g(x) = hg'(x+\theta h) = h\left(f'(x+\theta h + h) - f'(x+\theta h)\right) \quad \cdots ②.$$

さらに $f'(x)$ に平均値の定理を用いると，ある $\omega \in (0,1)$ が存在して，

$$f'(x+\theta h+h) - f'(x+\theta h) = hf''(x+\theta h+\omega h) \quad \cdots ③.$$

したがって，①, ②, ③より

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = h^2 f''(x+\theta h+\omega h)$$

であるから，f'' の連続性を用いて

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f''(x+\theta h+\omega h) = \boldsymbol{f''(x)}.$$

∎

3 (★★☆)(等式の証明)

$-1 \leqq x < 1$ のとき，$\mathrm{Arcsin}\, x = 2\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを，

$$f(x) := \mathrm{Arcsin}\, x - 2\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

とおいて，導関数 $f'(x)$ が恒等的に 0 であることを示すことによって，証明せよ．

解 $f(x) := \mathrm{Arcsin}\, x - 2\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $(-1 \leqq x < 1)$ とおく．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\frac{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{2}{(1-x)^2}}{1+\frac{1+x}{1-x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

ゆえに，$f(x)$ は $-1 \leqq x < 1$ で定数関数で，したがって任意の $x \in [-1,1)$ に対し

$$f(x) = f(0) = \mathrm{Arcsin}\, 0 - 2\mathrm{Arctan}\, 1 = -\frac{\pi}{2}$$

i.e.,

$$\mathrm{Arcsin}\, x = 2\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{\pi}{2}.$$

∎