平均値の定理の応用　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$　平均値の定理は

(a)
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h)$$

$(0<\theta<1)$ と表される。分母を払って

(b)
$$f(x+h)-f(x) = hf'(x+\theta h)$$

とした表示も有用である。

(1) 実数全体で定義された関数 $f(x)$ について，定数 $C \geqq 0$ があって

$$|f'(x)| \leqq C$$

が成り立っているとする。このときすべての x について

$$|f(x+1)-f(x)| \leqq C$$

が成り立つことを示せ。

[解] 平均値の定理 (b) より

$$f(x+1)-f(x) = 1 \cdot f'(x+\theta) = f'(x+\theta)$$

が得られるので，

$$|f(x+1)-f(x)| = |f'(x+\theta)| \leqq C$$

を得る。□

(2) 不等式

$$|\sin(\theta+h)-\sin\theta| \leqq |h|$$
$$|\cos(\theta+h)-\cos\theta| \leqq |h|$$

を示せ。

[解] $(\sin\theta)' = \cos\theta$ だから，平均値の定理 (b) より

$$\sin(\theta+h)-\sin\theta = h\cos(\theta+\sigma h)$$

$(0<\sigma<1)$ を得る。これより $|\cos x| \leqq 1$ だから

$$|\sin(\theta+h)-\sin\theta| = |h\cos(\theta+\sigma h)| \leqq |h|$$

が得られる。同様に

$$|\cos(\theta+h)-\cos\theta| = |-h\sin(\theta+\sigma h)| \leqq |h|$$

を得る。□

(3) 自然数 n について不等式

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

を示せ。

[解] $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ だから，平均値の定理 (b) より

$$\log(n+1) - \log n = 1 \cdot \frac{1}{n+\theta} = \frac{1}{n+\theta}$$

$(0 < \theta < 1)$ を得る。ここで $0 < \theta < 1$ より

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+\theta} < \frac{1}{n}$$

だから標記の不等式が得られる。□

(4) 不等式

$$e^{\frac{1}{100}} < \frac{100}{99}$$

を示せ。

[解] $(e^x)' = e^x$ だから，平均値の定理 (b) より

$$e^{\frac{1}{100}} - e^0 = \frac{1}{100}\, e^{\frac{\theta}{100}}$$

を得る。ここで $e^0 = 1$，また $0 < \theta < 1$ で e^x は単調増加だから，

$$e^{\frac{\theta}{100}} < e^{\frac{1}{100}}$$

も成り立つ。これらを上式に代入して，

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{100}} - 1 &< \frac{1}{100}\, e^{\frac{1}{100}} \\ \left(1 - \frac{1}{100}\right) e^{\frac{1}{100}} &< 1 \\ \frac{99}{100} e^{\frac{1}{100}} &< 1 \\ e^{\frac{1}{100}} &< \frac{100}{99} \end{aligned}$$

が得られる。□