初等関数

1 三角関数の加法公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を用いて以下の問に答えよ。

(1) 次の 2 つの公式を導け。

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2},\ \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

(2) $\tan(\alpha+\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(3) $\sin A + \sin B$ および $\cos A + \cos B$ を，$\sin, \cos$ の積として表せ。

(4) $\sin A \sin B$, $\sin A \cos B$ および $\cos A \cos B$ を $\sin, \cos$ の和として表せ。

(5) $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}, \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}, \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$ を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(6) $\cos 2\theta, \cos 3\theta, \cos 4\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ。

2

(1) $a, b, c > 0$ に対して

$$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\log x$ が e^x の逆関数であることを用いて，指数関数の加法公式 $e^{x+y} = e^x e^y$ から

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

を導け。

(3) $\log x$ が e^x の逆関数であることを用いて，指数関数の性質 $(e^x)^y = e^{xy}$ から

$$\log x^a = a \log x$$

を導け。

3 逆三角関数を用いて表せ。

(1) 勾配 3% を与える角度（つまり 100m 進むと 3m 上がる坂の角度）

(2) xy 平面で x 軸と直線 $y = 5x$ のなす角

(3) $\mathrm{AB}=5, \mathrm{BC}=7, \mathrm{CA}=4$ の三角形 ABC における $\angle \mathrm{B}$

(4) 縦 5，横 17 の長方形の 2 本の対角線のなす角（鋭角の方）

(5) 2 つの平面ベクトル $(3,1),(2,9)$ のなす角

(6) 2 つの空間ベクトル $(4,1,7),(2,-3,5)$ のなす角

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の逆三角関数の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1} 1$

(2) $\cos^{-1} 0$

(3) $\sin^{-1} \dfrac{1}{2}$

(4) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

(5) $\cos^{-1}(-1)$

(6) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) $\sin^{-1} x+\cos^{-1}=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(2) $\cos(2\cos^{-1} x)$ を x の多項式で表せ。

(3) $\cos(3\cos^{-1} x)$ を x の多項式で表せ。

(4) $\cos(4\cos^{-1} x)$ を x の多項式で表せ。

(5) $\cos(\sin^{-1} x)=\sqrt{1-x^2}$ を示せ。