§2 初等関数 (逆三角関数)　演習問題 2　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(逆三角関数の値 1)

次の値を求めよ：

(1) $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{2}$　(2) $\mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) $\mathrm{Arctan}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　(4) $\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

解 (1),(2) の求め方は (3),(4) を参照するとよい．(1),(2) については答えのみ記す：

(1) $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$.　(2) $\mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{3}}$.

(3) $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \alpha$ とおく．このとき，$\tan\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を意味する．したがって，これをみたす α は $\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$，すなわち $\mathrm{Arctan}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}}$.

(4) $\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \beta$ とおく．このとき，$\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ を意味する．ゆえに，これをみたす β は $\beta = \dfrac{5\pi}{6}$，すなわち $\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{5\pi}{6}}$.

■

2 (★☆☆)(逆三角関数に関する方程式)

次の方程式を解け．

(1) $\mathrm{Arccos}\,x = \mathrm{Arctan}\,\sqrt{5}$　(2) $\mathrm{Arctan}\,x + \pi = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

解 (1) $\mathrm{Arctan}\,\sqrt{5} = \alpha$ とおくと，$\sqrt{5} = \tan\alpha$，$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす．このとき，$\cos\alpha > 0$ に注意して $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 6$ より，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を得る．したがって，与えられた方程式 $\mathrm{Arccos}\,x = \mathrm{Arctan}\,\sqrt{5} = \alpha$ の解は

$$x = \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{6}}}.$$

(2) $\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \alpha$ とおくと，$-\dfrac{1}{3} = \cos\beta$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ をみたす．$\cos\beta < 0$ だから β の範囲は $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi \cdots$ ① と絞ることができ，これより $-\dfrac{\pi}{2} < \beta - \pi < 0 \cdots$ ② を得る．また，

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ より，$\tan^2\beta = 8$ を得る．したがって①より $\tan\beta = -2\sqrt{2} \cdots$ ③．ゆえに方程式 $\mathrm{Arctan}\, x + \pi = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \beta$ の解は②,③より

$$x = \tan(\beta - \pi) = \tan\beta = \boldsymbol{-2\sqrt{2}}.$$

■

3 (★★☆)(逆三角関数の値 2)

次の値を求めよ：

$$\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{4} + 2\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

解 $\alpha := \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{1}{4}$,　$\beta := \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ とおくと，

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{1}{4}, & -\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, & -\dfrac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

を満たす．求めるべき値は $\alpha + 2\beta$ である．$\dfrac{1}{4} < \dfrac{\sqrt{6}}{4} < \dfrac{\sqrt{8}}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ により，$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{4} \cdots$ ① に注意．今，$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ であるから，

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\beta) &= \sin\alpha\cos 2\beta + \cos\alpha\sin 2\beta \\ &= \frac{1}{4}\left(2\cos^2\beta - 1\right) + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot 2\sin\beta\cos\beta \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} - 1\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{4} = 1. \end{aligned}$$

①より $0 < \alpha + 2\beta < \dfrac{3\pi}{4}$ であるから，$\alpha + 2\beta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$.

■

4 (★★☆)(逆三角関数の和)

(1) n を自然数とする．このとき等式

$$\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n} = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n+1} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(2) (1) を利用して無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1}$ を求めよ．

解 (1)　$\alpha := \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{n+1},\quad \beta := \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{n^2+n+1}$ とおくと，

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1}{n+1}, & -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan\beta = \dfrac{1}{n^2+n+1}, & -\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

を満たす．$0 < \dfrac{1}{n^2+n+1} < \dfrac{1}{n+1}$ により，$0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{4} \cdots$ ① に注意．このとき，

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2+n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n^2+n+1}} = \frac{1}{n}.$$

①より $0 < \alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\alpha+\beta = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{n}$，すなわち証明すべき等式が示された．

(2)　(1) より $n = 1, 2, \ldots,$ に対し，

$$\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n+1} = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1} &= \sum_{n=1}^{N}\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \mathrm{Arctan}\,1 - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{N+1} \\ &= \frac{\pi}{4} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{N+1} \longrightarrow \frac{\pi}{4} \quad (\text{as } n \to \infty). \end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}.$ ∎

Check　逆三角関数の値を求めたり，方程式を解くなどの問題においては，逆三角関数の主値 $\mathrm{Arcsin}\,x$，$\mathrm{Arccos}\,x$，$\mathrm{Arctan}\,x$ の定義域・値域に注意して求めるとよい．