初等関数　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$　三角関数の加法公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を用いて以下の問に答えよ。

(1) 次の 2 つの公式を導け。

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2},\ \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

[解] $\cos\theta$ の加法公式で $\alpha=\beta=\theta$ とすると

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$$

これを $\sin^2\theta$ および $\cos^2\theta$ について解けばよい。

(2) $\tan(\alpha+\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

[解]

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

右辺の分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

(3) $\sin A+\sin B$ および $\cos A+\cos B$ を，$\sin,\cos$ の積として表せ。

[解] $A=\alpha+\beta, B=\alpha-\beta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B&=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\&=2\sin\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

α,β を A,B で表すと

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\ \beta=\frac{A-B}{2}$$

であるから，以上をつなげて

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

同様に

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B&=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2\cos\alpha\cos\beta\\&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

(4) $\sin A \sin B$, $\sin A \cos B$ および $\cos A \cos B$ を $\sin, \cos$ の和として表せ。

[解]

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

より,

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B,\ \cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$$

が得られるから,

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2},\ \cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$$

また

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

より,

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

が得られるから,

$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

(5) $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}, \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}, \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$ を $\cos\theta$ を用いて表せ。

[解]

$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta$

$= (4\cos^2\theta - 1)\sin\theta$

$\sin 4\theta = \sin(2\times 2\theta) = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)$

すなわち整理すると

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$
$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 4\cos^2\theta - 1$$
$$\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta$$

となる。

(6) $\cos 2\theta, \cos 3\theta, \cos 4\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ。

[解]

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta = \cos(2\times 2\theta) = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $a, b, c > 0$ に対して

$$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$$

が成り立つことを示せ。

[解] $\log_a c = u$ とおくと $c = a^u$, $\log_c b = v$ とおくと $b = c^v$ であるから，

$$b = c^v = (a^u)^v = a^{uv}$$

これより

$$\log_a b = uv = \log_a c \cdot \log_c b$$

(2) $\log x$ が e^x の逆関数であることを用いて，指数関数の加法公式 $e^{x+y} = e^x e^y$ から

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

を導け。

[解] $\log x = u, \log y = v$ とおくと $x = e^u, y = e^v$ であるから，

$$xy = e^u e^v = e^{u+v}$$

したがって

$$\log(xy) = u + v = \log x + \log y$$

(3) $\log x$ が e^x の逆関数であることを用いて，指数関数の性質 $(e^x)^y = e^{xy}$ から

$$\log x^a = a\log x$$

を導け。

[解] $\log x = u$ とおくと $x = e^u$ であるから，

$$x^a = (e^u)^a = e^{au}$$

したがって

$$\log x^a = au = a\log x$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 逆三角関数を用いて表せ。

(1) 勾配 3% を与える角度（つまり 100m 進むと 3m 上がる坂の角度）

[解] 求める角度を θ とおくと，$\tan\theta = \dfrac{3}{100}$ だから

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{100}$$

(2) xy 平面で x 軸と直線 $y = 5x$ のなす角

[解] 求める角度を θ とおくと，$\tan\theta = 5$ だから

$$\theta = \tan^{-1} 5$$

(3) $\mathrm{AB} = 5, \mathrm{BC} = 7, \mathrm{CA} = 4$ の三角形 ABC における $\angle\mathrm{B}$

[解] 余弦定理より

$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos\angle\mathrm{B}$$

だから，これを解いて

$$\cos\angle\mathrm{B} = \frac{29}{35}$$

したがって

$$\angle\mathrm{B} = \cos^{-1}\frac{29}{35}$$

(4) 縦 5，横 17 の長方形の 2 本の対角線のなす角（鋭角の方）

[解] 底辺 17，高さ 5 の直角三角形の内角で $\dfrac{\pi}{4}$ より小さい方を θ とすると，求める角度は 2θ である。一方 $\tan\theta = \dfrac{5}{17}$ だから，求める角度は

$$2\theta = 2\tan^{-1}\frac{5}{17}$$

(5) 2 つの平面ベクトル $(3, 1), (2, 9)$ のなす角

[解] ベクトルの内積を用いる。2 つのベクトルのなす角を θ とすると

$$(3, 1) \cdot (2, 9) = \sqrt{3^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 9^2}\cos\theta$$

これより

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

したがって

$$\theta = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{34}}$$

(6) 2 つの空間ベクトル $(4, 1, 7), (2, -3, 5)$ のなす角

[解] これもベクトルの内積を用いる。2 つのベクトルのなす角を θ とすると

$$(4, 1, 7) \cdot (2, -3, 5) = \sqrt{4^2 + 1^2 + 7^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}\cos\theta$$

これより

$$\cos\theta = \frac{20}{\sqrt{627}}$$

したがって

$$\theta = \cos^{-1}\frac{20}{\sqrt{627}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の逆三角関数の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

(2) $\cos^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\sin^{-1} \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

(4) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$

(5) $\cos^{-1}(-1) = \pi$

(6) $\sin^{-1} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

[解] $\sin^{-1} x = \theta$ とおくと $\sin\theta = x$ で $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。このとき

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = x,\ 0 \leqq \frac{\pi}{2} - \theta \leqq \pi$$

となることから,

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} x$$

であることがわかる。$\theta = \sin^{-1} x$ を戻すと求める式が得られる。

(2) $\cos(2\cos^{-1} x)$ を x の多項式で表せ。

[解] これから 3 問については, $\boxed{\mathbf{1}}$ の (6) の結果を用いる。$\cos^{-1} x = \theta$ とおくと $\cos\theta = x$ である。

$$\cos(2\cos^{-1} x) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$$

(3) $\cos(3\cos^{-1} x)$ を x の多項式で表せ。

[解] 同様に,

$$\cos(3\cos^{-1} x) = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x$$

(4) $\cos(4\cos^{-1} x)$ を x の多項式で表せ。

[解] これも同様である。

$$\cos(4\cos^{-1} x) = \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

(5) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ を示せ。

[解] $\sin^{-1} x = \theta$ とおくと $\sin\theta = x$ で $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。このとき

$$\cos(\sin^{-1} x) = \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-x^2}$$

一方 θ の範囲 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ においては $\cos\theta \geqq 0$ であるから，上記の $\pm$ は $+$ になる。したがって

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$