§13 広義積分　演習問題2

✐ **問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★**

$\boxed{1}$ (★★☆)(**広義積分と無限級数の遠方での振る舞いの違い**)

(1) 数列 $\{a_n\}$ に対して無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) $f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ 上で連続とするとき，

$$\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx \text{ が収束する} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

が一般には成り立たないことを次の関数 $f(x)$ に対して確かめよ．

$$f(x) := \begin{cases} 1-k^2|k-x|, & k-\frac{1}{k^2} \leqq x \leqq k+\frac{1}{k^2} \quad (k\in\mathbb{N},\ k\geqq 2) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ (★★☆)(**広義積分の収束と数列の関係**)

$f(x)$ $(x \geqq 0)$ は常に $f(x) \geqq 0$ を満たす連続関数で，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ が収束するとする．$a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$ とおく．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ (★★★)(**広義積分の収束と級数の収束の関係**)

(1) $f(x) \geqq 0$ は区間 $[1,\infty)$ で単調減少関数とするとき，次を示せ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ が収束}$$

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は $s>1$ のとき収束し，$s \leqq 1$ のとき発散することを示せ．

(3) 次の級数の収束・発散を判定せよ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$.

$\boxed{4}$ (★★☆)(**広義積分における変数変換**)

(1) $f(x)$ を $x>0$ で定義された連続関数とする．変数変換によって，次の広義積分の一方が収束すれば他方も収束し，両者は等しいことを示せ：

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx \qquad ; \qquad \int_0^\infty \frac{f(1/x)}{x^2+1}\,dx.$$

(2) (1) を利用して，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^{2021}}{x^2+1}\,dx$ を求めよ．

$\boxed{5}$ (★★☆)(**ガンマ関数**)

(1) 関数

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

を**ガンマ関数**という．$\Gamma(s)$ は $s>0$ で収束することを示せ．

(2) 任意の非負整数 m に対して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{e^x}=0$ であることを示せ．

(3) (2) を用いて，$s>0$ に対し次を示せ．

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$$

(4) n を自然数とするとき次を示せ．

$$\Gamma(n)=(n-1)!.$$

$\boxed{6}$ (★★★)(**ガンマ関数で表す広義積分**)

$t>0$ に対し広義積分 $I(t)$ を

$$I(t) := \int_0^\infty e^{-x^t}\,dx$$

で定める．

(1) $I(t)$ をガンマ関数 $\Gamma(s)$ を用いて表せ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(t)$ を求めよ．

$\boxed{7}$ (★★★)(**原始関数不明の広義積分の計算 1**)

次の問いに答えよ．

(1) $\log(\sin x) = \log x + \log \dfrac{\sin x}{x}$ と分解して，広義積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$$

が収束することを示せ．

(2) $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$ を示し，I の値を求めよ．

$\boxed{8}$ (★★★)(**原始関数不明の広義積分の計算 2**)

次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{h \to 0} h \log(\sin h)$ を求めよ．

(2) $\boxed{7}$ の結果を用いて，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\, dx$ を求めよ．