# 広義積分　演習問題 4　解答

**問 1.** (1) $a > 0$ とする．このとき次の広義積分が収束するか発散するか判定せよ．

$$\text{(i)} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^a} dx$$

(2) $b > -1$ とする．このとき次の広義積分が収束するか発散するか判定せよ．

$$\text{(i)} \int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^b} dx \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{|\sin(x^2)|}{x^b} dx$$

**解答.** はじめに，広義積分の収束・発散の判定に関する有用な定理を復習する．

**定理 1** (Cauchy の判定法)**.** 関数 $f$ は区間 $[1, \infty)$ で連続とする．このとき広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ が存在するための十分条件は, 下記が成り立つことである: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 十分大きな正の数 $p$, $q(p < q)$ が存在して

$$\left| \int_p^q f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

が成立する．

**定理 2.** $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$ とし，関数 $f$ は区間 $[a, b)$ で連続とする．連続関数 $g$ で

- 各 $x \in [a, b)$ について $|f(x)| \leq g(x)$.
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は存在する．

をみたすものが存在すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は存在する．

**定理 3.** $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$ とし，関数 $f$ は区間 $[a, b)$ で連続とする．連続関数 $g$ で

- 各 $x \in [a, b)$ について $0 \leq g(x) \leq f(x)$.
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は発散する．

をみたすものが存在すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は発散する．

定理 2, 3 は，他の区間 $(a, b], [a, \infty), (-\infty, b]$ における広義積分についても同様に成立する．

(1) (i) <u>$a > 1$ のとき</u>, 被積分関数は $[1, \infty)$ 上で連続であり，各 $x \in [1, \infty)$ に対して

$$\left| \frac{\sin x}{x^a} \right| = \frac{|\sin x|}{|x^a|} \leq \frac{1}{x^a}$$

が成り立つ．また，$M \geq 1$ なる $M$ に対して

$$\int_1^M \frac{dx}{x^a} = \left[ -\frac{1}{(a-1)x^{a-1}} \right]_1^M = -\frac{1}{(a-1)M^{a-1}} + \frac{1}{a-1} \to \frac{1}{a-1} \quad (M \to \infty)$$

となることから，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ は収束する．したがって，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ は収束する．
$\underline{0 < a \leq 1 \text{ のとき}}$, 定理 1 を適用する．部分積分により

$$\begin{aligned}
\int_p^q \frac{\sin x}{x^a}dx &= \int_p^q \frac{1}{x^a}\frac{d}{dx}(-\cos x)dx \\
&= \left[-\frac{\cos x}{x^a}\right]_p^q - \int_p^q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^a}\right)(-\cos x)dx \\
&= -\frac{\cos q}{q^a} + \frac{\cos p}{p^a} - a\int_p^q \frac{\cos x}{x^{a+1}}dx \\
&\leq \frac{1}{q^a} + \frac{1}{p^a} + a\int_p^q \frac{1}{x^{a+1}}dx \\
&= \frac{2}{p^a}
\end{aligned}$$

となることが分かる．よって任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 正の数 $p$, $q(p < q)$ を $p = \left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right)^{1/a} + 1$, $q = p + 1$ と定めると

$$\left|\int_p^q \frac{\sin x}{x^a}dx\right| \leq \frac{2}{p^a} < \varepsilon$$

が成立する．定理 1 より, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx$ は収束する．
以上より, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx$ は $a > 0$ のとき収束する． ■

(ii) $\underline{a > 1 \text{ のとき}}$, (i) と同様に広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^a}\,dx$ は収束する．
$\underline{0 < a \leq 1 \text{ のとき}}$, 自然数 $n$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^a}dx &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{(t+n\pi)^a}dt \\
&\geq \frac{1}{(n+1)^a\pi^a}\int_0^\pi \sin t dt \\
&= \frac{2}{(n+1)^a\pi^a}
\end{aligned}$$

が成立する．ここで 1 つ目の等号において変数変換 $x = t + n\pi$ を行った．よって

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^a}dx &= \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^a}dx \\
&\geq \frac{2}{\pi^a}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^a} \\
&= \frac{2}{\pi^a}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^a} \to \infty \quad (n \to +\infty)
\end{aligned}$$

と分かり, 広義積分 $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^a}\,dx$ は発散する．
以上より, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^a}dx$ は $a > 1$ のとき収束し, 一方で $0 < a \leq 1$ のとき発散する． ■

(2) (i) $b>1$ のとき, (1)(i) と同様に広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^b}dx$ は収束する.
$-1<b\leq 1$ のとき, 定理 1 を適用する. 部分積分により

$$\begin{aligned}\int_p^q \frac{\sin(x^2)}{x^b}dx &= \int_p^q \frac{1}{x^b}\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(-\cos(x^2))dx \\ &= \left[-\frac{\cos(x^2)}{2x^{b+1}}\right]_p^q - \int_p^q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x^{b+1}}\right)(-\cos(x^2))dx \\ &= -\frac{\cos(q^2)}{2q^{b+1}} + \frac{\cos(p^2)}{2p^{b+1}} - \frac{b+1}{2}\int_p^q \frac{\cos(x^2)}{x^{b+2}}dx \\ &\leq \frac{1}{2q^{b+1}} + \frac{1}{2p^{b+1}} + \frac{b+1}{2}\int_p^q \frac{1}{x^{b+2}}dx \\ &= \frac{1}{p^{b+1}}\end{aligned}$$

となることが分かる. よって任意の $\varepsilon>0$ に対して, 正の数 $p$, $q(p<q)$ を $p=\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(b+1)}+1$, $q=p+1$ と定めると

$$\left|\int_p^q \frac{\sin(x^2)}{x^b}dx\right| \leq \frac{1}{p^{b+1}} < \varepsilon$$

が成立する. 定理 1 より, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^b}dx$ は収束する.
以上より, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^b}dx$ は $b>-1$ のとき収束する. ■
(ii) 変数変換 $t=x^2$ により

$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x^2)|}{x^b}dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{b+1}{2}}}dt$$

となることに注意する. (1)(ii) の結果より, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{b+1}{2}}}dt$ は $\frac{b+1}{2}>1$ のとき収束し, 一方で $0<\frac{b+1}{2}\leq 1$ のとき発散する. 以上より, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin(x^2)|}{x^b}dx$ は $b>1$ のとき収束し, 一方で $-1<b\leq 1$ のとき発散する. ■

**注意 4.** (2)(i) の結果より, $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ が収束することが分かる. 積分 $S(x)=\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)dt$ はフレネル積分と呼ばれ, 光学で用いられる.