広義積分　演習問題３　解答

問 1. 次の広義積分が収束するか発散するか判定せよ.

$$\text{(i)} \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^1 \frac{\log x}{x^2+1}\,dx \qquad \text{(iii)} \quad \int_0^1 \frac{4}{1-x^4}\,dx$$

解答. まず，広義積分の収束，発散の判定に関して有用な定理を復習しておく.

定理 1. $a, b \in \mathbb{R}\,(a<b)$ とし，関数 f は区間 $[a,b)$ で連続とする．連続関数 g で

- 各 $x \in [a,b)$ について $|f(x)| \leq g(x)$.
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は存在する.

をみたすものが存在すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は存在する.

定理 2. $a, b \in \mathbb{R}\,(a<b)$ とし，関数 f は区間 $[a,b)$ で連続とする．連続関数 g で

- 各 $x \in [a,b)$ について $0 \leq g(x) \leq f(x)$.
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は発散する.

をみたすものが存在すれば，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は発散する.

定理 1, 2 は，他の区間 $(a,b], [a,\infty), (-\infty,b]$ における広義積分についても同様に成立する．(a,b) における広義積分の存在・発散判定については，そもそも定義より，ある $c\,(a<c<b)$ を用いて 2 つの広義積分

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

が存在すれば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が存在するということだったので，各 $(a,c]$, $[c,b)$ における上の 2 つの広義積分に対して定理 1, 2 を適用すればよい．定理 1 の仮定をみたす g を f の**優関数**と呼ぶことがある．これら定理を用いて，問 1 の解答を述べる.

(i) 被積分関数は $[1,\infty)$ 上で連続であり，各 $x \in [1,\infty)$ に対して

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| = \frac{|\sin x|}{|x^2|} \leq \frac{1}{x^2}$$

が成り立つ．また，$\beta \geq 1$ なる β に対して

$$\int_1^{\beta} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\beta} = -\frac{1}{\beta}+1 \to 1 \quad (\beta \to \infty)$$

とわかるから，$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ は収束する．したがって，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ は収束する.　■

(ii) 被積分関数は，$(0,1]$ で連続であり，$0<x\leq 1$ に対し，

$$\left|\frac{\log x}{x^2+1}\right| = \frac{|\log x|}{|x^2+1|} = \frac{-\log x}{x^2+1} \leq -\log x$$

である．また，$0 < \alpha \leq 1$ なる α に対して

$$\int_\alpha^1 (-\log x)\, dx = [-x\log x + x]_\alpha^1 = 1 + \alpha\log\alpha - \alpha \to 1 \quad (\alpha \to +0).$$

を得る．ここで，最後の極限は

$$\alpha\log\alpha = \frac{\log\alpha}{1/\alpha}$$

で，

$$\frac{(\log\alpha)'}{(1/\alpha)'} = \frac{1/\alpha}{-1/\alpha^2} = -\alpha \to 0 \quad (\alpha \to +0)$$

より，ロピタルの定理から $\lim_{\alpha\to+0} \alpha\log\alpha = 0$ となることによる．したがって，$\int_0^1 (-\log x)\, dx$ は収束するから，広義積分 $\int_0^1 \frac{\log x}{x^2+1}\, dx$ は収束する． ■

(iii) どんな $0 \leq x < 1$ についても

$$\begin{aligned}\frac{4}{1-x^4} &= \frac{4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} \\ &\geq \frac{1}{1-x} \geq 0\end{aligned}$$

である．また，$0 \leq \beta < 1$ なる β について

$$\int_0^\beta \frac{dx}{1-x} = [-\log|1-x|]_0^\beta = -\log(1-\beta) \to \infty \quad (\beta \to 1-0)$$

とわかり，$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\, dx$ は発散するとわかるので，広義積分 $\int_0^1 \frac{4}{1-x^4}\, dx$ は発散する． ■

問 2. (i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ の値を広義積分の定義にしたがって求めよ．

(ii) 一般に $f(x)$ と $g(x)$ が $(0,1]$ 上で広義積分可能なとき，関数 $f(x)g(x)$ は広義積分可能と言えるかどうか理由も含め答えよ．

解答. (i) $0 < \alpha \leq 1$ なる α に対して，

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\alpha^1 = 2 - 2\alpha \to 2 \quad (\alpha \to +0)$$

とわかるので，広義積分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ は存在して，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

■

(ii) $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ とすると，(i) の結果より $f(x)$, $g(x)$ ともに $(0, 1]$ 上で広義積分可能である．一方，$0 < \alpha \leq 1$ なる α に対して，

$$\int_\alpha^1 f(x)g(x)\,dx = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = [\log|x|]_\alpha^1 = -\log\alpha \to \infty \quad (\alpha \to +0)$$

であるから，$f(x)g(x)$ は $(0, 1]$ 上で広義積分可能ではない．したがって，一般に $f(x)$ と $g(x)$ が $(0, 1]$ 上で広義積分可能なとき，関数 $f(x)g(x)$ は広義積分可能とは言えない． ■