§13 広義積分　演習問題２　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(広義積分と無限級数の遠方での振る舞いの違い)

(1)　数列 $\{a_n\}$ に対して無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2)　$f(x)$ は区間 $[0,\infty)$ 上で連続とするとき，

$$\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx \text{ が収束する} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

が一般には成り立たないことを次の関数 $f(x)$ に対して確かめよ．

$$f(x) := \begin{cases} 1-k^2|k-x|, & k-\frac{1}{k^2} \leqq x \leqq k+\frac{1}{k^2} \quad (k\in\mathbb{N},\ k\geqq 2) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

解　(1)　$S_N := \sum_{n=1}^{N}|a_n|$ とおく．$n \geqq 2$ のとき

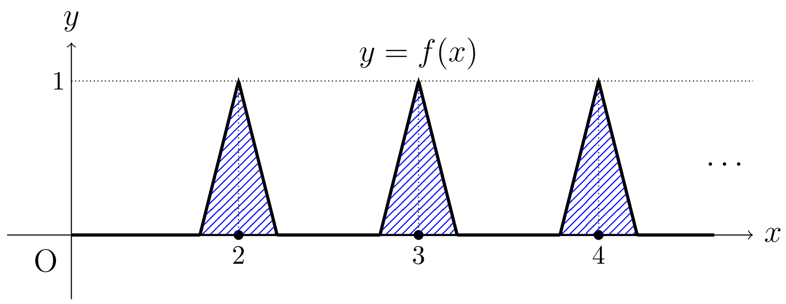
$$|a_N| = S_N - S_{N-1}$$

だから，$n\to\infty$ の極限へ移行し $\alpha := \lim_{N\to\infty} S_N$ とおくと，仮定より $\{S_N\}$ は収束するから $\alpha < +\infty$．したがって，

$$\lim_{N\to\infty}|a_N| = \alpha-\alpha = 0^*.$$

すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(2)　$f(x)$ のグラフの概形は下図の通り．山の部分は $f(x) = 1-k^2|k-x| \quad (k-\frac{1}{k^2} \leqq x \leqq k+\frac{1}{k^2})$ であることに注意．



明らかに，$f(x)$ は $[0,\infty)$ 上連続である．また，$\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx$ は上図斜線部の三角形の面積の総和に等しい．ゆえに，

$$\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k^2}\cdot 1 = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

*α が有限だから $\alpha-\alpha$ とできる．$\infty-\infty$ は不定形であることに注意．

$$
\begin{aligned}
&\leqq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 < +\infty
\end{aligned}
$$

である†．よって確かに $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx$ は収束する．ところが，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ではない．したがって，この $f(x)$ が連続かつ $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$ ではあるが，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ でない例を与える．■

2 (★★☆)(広義積分の収束と数列の関係)

$f(x)$ $(x \geqq 0)$ は常に $f(x) \geqq 0$ を満たす連続関数で，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ が収束するとする．$a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$ とおく．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

解 **【解 1】** すべての $x \geqq 0$ に対して $f(x) \geqq 0$ ゆえ，積分の正値性より $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqq 0$. $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ に注意すると，$\boxed{1}$-(1) より無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．したがって，$\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

【解 2】 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でないとして矛盾を導く．すべての n に対して $a_n \geqq 0$ であるから，$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ とある正定数 $\varepsilon_0 > 0$ を選んで，すべての $k = 1, 2, \ldots$ に対して $a_{n_k} \geqq \varepsilon$ が成り立つようにできる．ゆえに，

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geqq \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon = +\infty
$$

となるが，これは仮定の $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束することに矛盾する．したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．■

3 (★★★)(広義積分の収束と級数の収束の関係)

(1) $f(x) \geqq 0$ は区間 $[1, \infty)$ で単調減少関数とするとき，次を示せ：

$$
\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ が収束}
$$

---

†解答中では $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ を優級数 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ で評価したが，実際は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ であることが知られている．したがって，$\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$ と正確な値を計算することが可能である．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は $s>1$ のとき収束し，$s\leqq 1$ のとき発散することを示せ．

(3) 次の級数の収束・発散を判定せよ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$.

解 (1) $f(x)$ は区間 $[1,\infty)$ 上で単調減少であるから，$n\leqq x\leqq n+1$ に対して，

$$f(n+1)\leqq f(x)\leqq f(n).$$

よって $n\leqq x\leqq n+1$ で積分して，

$$f(n+1)\leqq \int_n^{n+1} f(x)\,dx\leqq f(n)$$

が成立する．ゆえに，$n=1,\ldots,N-1$ $(n\geqq 2)$ として辺ごとに足し合わせて

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)\leqq \int_1^{N} f(x)\,dx\leqq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

i.e.,

$$\sum_{n=2}^{N} f(n)\leqq \int_1^{N} f(x)\,dx\leqq \sum_{n=1}^{N} f(n)\quad(\because\ f(n)\geqq 0).$$

が成立する．これより，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束 $\iff$ $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ が収束.

(2) $f(x):=\dfrac{1}{x^s}$ とおく．

(i) $s>0$ とする．$f(x)$ は $[1,\infty)$ 上単調減少であるから，(1) の結果を用いて，

- $s>1$ のとき：$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\,dx=\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^R=\frac{1}{s-1}<+\infty$ (収束)

$$\overset{(1)}{\iff}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<+\infty\ (\text{収束})$$

- $s=1$ のとき：$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\,dx=\lim_{R\to+\infty}[\log x]_1^R=+\infty$ (発散)

$$\overset{(1)}{\iff}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=+\infty\ (\text{発散})$$

- $0<s<1$ のとき：$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\,dx=\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^R=+\infty$ (発散)

$$\overset{(1)}{\iff}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<+\infty\ (\text{発散})$$

(ii)　$s \leqq 0$ のとき，各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $\frac{1}{n^s} \geqq 1$ より，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty$ (発散) $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx = +\infty$ (発散).

以上をまとめると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} < +\infty \text{ (収束)} & \cdots \quad s > 1 \\ = +\infty \text{ (発散)} & \cdots \quad s \leqq 1 \end{cases}$$

(3) (i)　$f(x) := \dfrac{x}{x^2+1}$ $(x \geqq 1)$ とおく．$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leqq 0$ だから，$f(x)$ は $x \geqq 1$ で単調に減少する．広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ について，

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^{\infty} = +\infty \text{ (発散)}$$

であるから，(1) より級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ は**発散する**.

(ii)　$g(x) := \dfrac{x}{e^x}$ $(x \geqq 1)$ とおく．$g'(x) = (1-x)e^{-x} \leqq 0$ だから，$g(x)$ は $x \geqq 1$ で単調に減少する．広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ について，部分積分より

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{e^x}\,dx &= \left[-xe^{-x}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx \\ &= e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_1^{\infty} \\ &= 2e^{-1} < +\infty \text{ (収束)} \end{aligned}$$

であるから，(1) より級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ は**収束する**.

■

$\boxed{4}$ (★★☆)(広義積分における変数変換)

(1)　$f(x)$ を $x > 0$ で定義された連続関数とする．変数変換によって，次の広義積分の一方が収束すれば他方も収束し，両者は等しいことを示せ：

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx \qquad ; \qquad \int_0^{\infty} \frac{f(1/x)}{x^2+1}\,dx.$$

(2)　(1) を利用して，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^{2021}}{x^2+1}\,dx$ を求めよ.

解 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx$ が収束するとする．変数変換 $x=1/y$ によって，$dx=-\dfrac{dy}{y^2}$ および $x:0\to\infty \longleftrightarrow y:\infty\to 0$ であるから，

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx = \int_\infty^0 \frac{f(1/y)}{(1/y)^2+1}\left(-\frac{dy}{y^2}\right) = \int_0^\infty \frac{f(1/y)}{y^2+1}\,dy$$

となるから，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(1/x)}{x^2+1}\,dx$ も収束し，両者は等しい．反対に，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(1/x)}{x^2+1}\,dx$ の収束を仮定しても同じ結論が得られる．

(2) $f(x)=(\log x)^{2021}$ とおくと，$f(x)$ は $x>0$ で連続であり，$f(1/x)=-(\log x)^{2021}$ を満たす．ゆえに，$I:=\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^{2021}}{x^2+1}\,dx$ とおくと，(1) より

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{f(1/x)}{x^2+1}\,dx = -\int_0^\infty \frac{(\log x)^{2021}}{x^2+1}\,dx \\ &= -I \end{aligned}$$

したがって求める値は，$\boldsymbol{I=0}$. ∎

$\boxed{5}$ (★★☆)(ガンマ関数)

(1) 関数

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

を**ガンマ関数**という．$\Gamma(s)$ は $s>0$ で収束することを示せ．

(2) 任意の非負整数 m に対して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{e^x}=0$ であることを示せ．

(3) (2) を用いて，$s>0$ に対し次を示せ．

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$$

(4) n を自然数とするとき次を示せ．

$$\Gamma(n)=(n-1)!.$$

解 (1) $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ と 2 つの広義積分に分ける．$\varepsilon>0$ を任意にとる．$\varepsilon\leqq x\leqq 1$ に対し，$x^{s-1}e^{-x}\leqq x^{s-1}$ であって，

$$\int_0^1 x^{s-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 x^{s-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[\frac{x^s}{s}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{s} < +\infty \quad (\because s>0)$$

だから[‡]，$s>0$ のとき広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は収束する．

[‡]記号 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\searrow 0}$ は $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}$ と同じ．

次に，$R>1$ を任意にとる．$1 \leqq x \leqq R$ に対し，$x^{s-1}e^{-x} \leqq e^{-x/2}$ であって，

$$\int_1^R e^{-x/2}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R e^{-x/2}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\left[-2e^{-x/2}\right]_1^R = 2e^{-1/2} < +\infty$$

だから，$s>0$ のとき広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は収束する．

以上より，$\Gamma(s)$ は $s>0$ のとき収束する．

(2)　はじめに，すべての自然数 n に対して $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$ $(x \geqq 0)$ $\cdots$① であることを示す．

・$n=1$ のとき，$e^x \geqq 1+x > x$ より明らか．

・ある n で①を仮定すると，積分の正値性より

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt \quad \therefore \quad e^x - 1 > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

すなわち，$e^x > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ となって，①は $n+1$ でも成り立つ．したがって，すべての $n\in\mathbb{N}$ で①が成り立つ．これより，$0 < \dfrac{x^{n-1}}{e^x} < \dfrac{n!}{x}$ であり，$n-1=m$ とおくと m は任意の非負整数で，

$$0 < \frac{x^m}{e^x} < \frac{(m+1)!}{x} \to 0 \quad (x\to+\infty).$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{e^x} = 0$ である．

(3)　部分積分を用いて，

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx = \left[-x^s e^{-x}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \\ &= s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad (\because (2)) \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

(4)　(3) より $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ だから，これを繰り返し用いて

$$\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1).$$

$\displaystyle\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$ ゆえ，$\boldsymbol{\Gamma(n) = (n-1)!}$. ∎

Check

広義積分 $\boldsymbol{B(s,t) := \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx}$ を**ベータ関数**という (B は β の大文字).
ベータ関数は **$s>0, t>0$ のとき収束**する．ガンマ関数 $\Gamma(s)$ とベータ関数 $B(s,t)$ の間に成立する関係式

$$\boldsymbol{B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}}$$

は重積分を用いて証明される．これは微分積分 II 演習問題 §14 で扱う．

$\boxed{6}$ (★★★)(ガンマ関数で表す広義積分)

$t>0$ に対し広義積分 $I(t)$ を

$$I(t) := \int_0^\infty e^{-x^t}\,dx$$

で定める.

(1) $I(t)$ をガンマ関数 $\Gamma(s)$ を用いて表せ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(t)$ を求めよ.

解 (1) $y=x^t$ とおく. $x=y^{\frac{1}{t}}$ であって, $dx=\dfrac{1}{t}y^{\frac{1}{t}-1}dy$. また $x:0\to\infty \longleftrightarrow y:0\to\infty$ であるから,

$$\begin{aligned}
I(t)=\int_0^\infty e^{-x^t}\,dx &= \int_0^\infty e^{-y}\cdot\frac{1}{t}y^{\frac{1}{t}-1}dy\\
&=\frac{1}{t}\int_0^\infty y^{\frac{1}{t}-1}e^{-y}dy\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{t}\Gamma\left(\frac{1}{t}\right)}.
\end{aligned}$$

(2) $s:=\dfrac{1}{t}$ とおく. (1) および $\boxed{\mathbf{3}}$ -(3) を用いると,

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{s\searrow 0} s\Gamma(s)=\lim_{s\searrow 0}\Gamma(s+1)\quad\cdots①.$$

今, $R>0$ を任意にとる. 関数 $s\mapsto x^s$ $(x>0)$ は連続だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, ある $\delta>0$ が存在して,

$$|s|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |x^s-1|=|x^s-x^0|<\varepsilon \quad (0<x<R)$$

が成り立つ. $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$ に注意して①を用いると,

$$\begin{aligned}
|\Gamma(s+1)-\Gamma(1)| &= \left|\lim_{R\to+\infty}\int_0^R (x^s-1)e^{-x}\,dx\right|\\
&\leqq \lim_{R\to+\infty}\int_0^R |x^s-1|\,e^{-x}\,dx\\
&\leqq \varepsilon\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx=\varepsilon.
\end{aligned}$$

したがって, 上の不等式から $\Gamma(s+1)$ は $s=0$ で連続であることがわかり,

$$\lim_{s\searrow 0}\Gamma(s+1)=\Gamma(1)=1$$

すなわち, ①より

$$\boldsymbol{\lim_{t\to+\infty} I(t)=1}.$$

■

7 (★★★)(原始関数不明の広義積分の計算 1)

次の問いに答えよ．

(1) $\log(\sin x) = \log x + \log \dfrac{\sin x}{x}$ と分解して，広義積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$$

が収束することを示せ．

(2) $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$ を示し，I の値を求めよ．

解 (1) $\log(\sin x) = \log x + \log \dfrac{\sin x}{x}$ に注意する．まず広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x\, dx$ については，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \log x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ [x \log x - x]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \right\} = \frac{\pi}{2}\left(\log \frac{\pi}{2} - 1\right) \qquad (\because \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0)$$

より，確かに収束する．次に，$\sqrt{x} \log \dfrac{\sin x}{x} \to 0$ $(x \searrow 0)$ だから，ある定数 M が存在して，任意の $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ に対し，

$$\left| \sqrt{x} \log \frac{\sin x}{x} \right| \leqq M \iff \left| \log \frac{\sin x}{x} \right| \leqq \frac{M}{\sqrt{x}}.$$

ここで，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{\sqrt{x}}\, dx$ は (分母の指数が 1 より小さいため) 収束するから，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \log \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は収束し，したがって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin x}{x}\, dx$ は収束する．

以上より，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$ は収束する．

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx \quad \cdots ①$ において，$y = \frac{\pi}{2} - x$ と変数変換すると，

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos y)\, dy \quad \cdots ②.$$

よって，① + ② より

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\log(\sin x) + \log(\cos x)\}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx \quad \cdots ③. \end{aligned}$$

今度は右辺の積分において，$2x = t$ の変数変換を考えると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\left(\frac{\sin t}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin t)\,dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t)\,dt\right\} - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \cdots ④$$

右辺第 2 項の積分において，$s = t - \frac{\pi}{2}$ の置換を考えると，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\right)\,ds$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos s)\,ds = I.$$

ゆえに，これと④より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\{I + I\} - \frac{\pi}{2}\log 2.$$

よって，③と合わせて $I = -\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\log 2}$. ∎

$\boxed{8}$ (★★★)(原始関数不明の広義積分の計算 2)

次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\lim_{h\to 0} h\log(\sin h)$ を求めよ．

(2) $\boxed{7}$ の結果を用いて，広義積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,dx$ を求めよ．

解 (1)

$$\lim_{h\to 0} h\log(\sin h) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{\sin h}\cdot \sin h\log(\sin h)$$

$$= 1\cdot 0 = \mathbf{0}.$$

(2) (1) および $\boxed{7}$ の $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ であることを用いると，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot(\log(\sin x))'\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[x\log(\sin x)\right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx\right\}$$

$$\overset{(1)}{=} 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}\log 2}.$$

∎