広義積分　演習問題１　解答

問 1. 以下の広義積分の値を求めよ．

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(ii)} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)} \qquad \text{(iii)} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

解答. 解答を始める前に，広義積分の定義を簡単に復習しておく．

- 関数 f は区間 $[a,b)$ $(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$ で連続[*1]な関数とする． $\displaystyle\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ が収束するとき，f は $[a,b)$ で**広義積分可能**（もしくは広義積分が存在する，広義積分が収束するともいう）であるといい，その極限を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と表す．
- 関数 f は区間 $[a,\infty)$ $(a \in \mathbb{R})$ で連続な関数とする． $\displaystyle\lim_{\beta \to \infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$ が収束するとき，f は $[a,\infty)$ で**広義積分可能**（もしくは広義積分が存在する，広義積分が収束するともいう）であるといい，その極限を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ と表す．
- $(a,b]$ や $(-\infty,b]$ で定義された関数に対しても同様に

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

  が定義される．
- f が開区間 (a,b) ($a \in \mathbb{R}$ または $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ または $b = \infty$) で連続であるとき，$a < c < b$ なる c に対して広義積分

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

  がともに存在するとき，f は (a,b) で**広義積分可能**（もしくは広義積分が存在する，広義積分が収束するともいう）であるといい，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

  と定める．f が広義積分可能であるかどうかは，c のとり方に依らないことも示される．

すなわち，通常の（リーマン）積分は有界閉区間上で定義された有界関数に対して考えるものであるが，非有界区間上や非有界な関数に対しても “積分みたいなもの” を考えようということである．定義にしたがって解答を述べる．

(i) 被積分関数は $(0,1]$ 上で連続であり，$0 < \beta < 1$ なる β に対して

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= [\arcsin x]_0^\beta = \arcsin\beta \\ &\to \frac{\pi}{2} \quad (\beta \to 1-0) \end{aligned}$$

[*1] 実際は “局所可積分” と呼ばれる性質をみたせば広義積分は考えられるが，ここでは連続な関数を考える．

であるから，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ は存在し

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

■

(ii) 被積分関数は $[1,\infty)$ で連続な関数であり，$\beta > 1$ なる β に対して

$$\begin{aligned}
\int_1^\beta \frac{dx}{x(x^2+1)} &= \int_1^\beta \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int_1^\beta \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\right) dx \\
&= \int_1^\beta \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right) dx \\
&= \left[\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^\beta \\
&= \log\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} + \frac{1}{2}\log 2 \\
&= \log\frac{1}{\sqrt{1+1/\beta^2}} + \frac{1}{2}\log 2 \to \frac{1}{2}\log 2 \quad (\beta\to\infty).
\end{aligned}$$

したがって，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)}$ は存在し，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\log 2.$$

■

(iii) 被積分関数は $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ 上で連続であり，$\beta > 0$ に対して

$$\int_0^\beta \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_0^\beta = \arctan\beta \to \frac{\pi}{2} \quad (\beta\to\infty)$$

より，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ は存在して，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ とわかる．また，$\alpha < 0$ のとき

$$\int_\alpha^0 \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{-\alpha} \frac{dt}{t^2+1} \to \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} \quad (\alpha\to-\infty)$$

より，$\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1}$ は存在して，$\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ とわかる．したがって $\displaystyle\int_\infty^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ は存在して，

$$\int_\infty^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

■