様々な不定積分　問題1　解答

次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は C とせよ.

$\boxed{1}$ (1) $I = \displaystyle\int x\sqrt{2-x}\,dx$

[解]: $t = \sqrt{2-x}$, すなわち $x = 2 - t^2$ として置換積分を行うと,

$$dt = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\,dx\,, \qquad dx = -2t\,dt$$

となる. したがって,

$$I = \int \left(-2t^2\left(2-t^2\right)\right)\,dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + C.$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$I = -\frac{2\,(2-x)^{\frac{3}{2}}\,(3x+4)}{15} + C.$$

(2) $I = \displaystyle\int (x+2)\sqrt{2x+3}\,dx$

[解]: $t = \sqrt{2x+3}$, すなわち $x = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{3}{2}$ として置換積分を行うと,

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx\,, \qquad dx = t\,dt$$

となる. したがって,

$$I = \int t^2\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\,dt = \frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{6} + C.$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$I = \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}\,(3x+7)}{15} + C.$$

(3) $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}\,dx$

[解]: $t = \sqrt{2x-1}$, すなわち $x = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{2}$ として置換積分を行うと,

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx\,, \qquad dx = t\,dt$$

となる. したがって,

$$I = \int \frac{1}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}}\,dt = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt = 2\tan^{-1} t + C.$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$I = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2x-1}\right) + C.$$

(4) $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\,dx$

[解]: $t = \sqrt{x+2}$, すなわち $x = t^2 - 2$ として置換積分を行うと,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx\,, \qquad dx = 2t\,dt$$

となる. 部分分数分解を使って積分すると

$$I = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right)dt = \log|t-1| - \log|t+1| + C.$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$I = \log\left|\sqrt{x+2} - 1\right| - \log\left|\sqrt{x+2} + 1\right| + C.$$

(5) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2} - 1}{2x + \sqrt{x+2} + 1}\,dx$

[解]: $t = \sqrt{x+2}$, すなわち $x = t^2 - 2$ として置換積分を行うと,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx\,, \qquad dx = 2t\,dt$$

となる. 部分分数分解を使って積分すると,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t\,(t-1)}{2t^2+t-3}\,dt = \int \left(1 - \frac{3}{2t+3}\right)dt \\ &= t - \frac{3\log|2t+3|}{2} + C. \end{aligned}$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$I = \sqrt{x+2} - \frac{3\log\left(2\sqrt{x+2}+3\right)}{2} + C.$$

(6) $I = \displaystyle\int \frac{1}{e^x + 5 + 4e^{-x}}\,dx$

[解]: $t = e^x$ として置換積分すると, $dt = e^x\,dx$, $dx = \dfrac{1}{t}\,dt$ より,

$$I = \int \frac{1}{t\left(t+5+\frac{4}{t}\right)}\,dt = \int \frac{1}{t^2+5t+4}\,dt = \int \left(-\frac{1}{3\,(t+4)} + \frac{1}{3\,(t+1)}\right)dt$$

となる. t に関して不定積分を求めると,

$$I = \frac{\log|t+1|}{3} - \frac{\log|t+4|}{3} + C.$$

したがって変数 x の関数へ書き直すと

$$I = \frac{\log\left(e^x+1\right)}{3} - \frac{\log\left(e^x+4\right)}{3} + C.$$

(7) $I=\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

[解]: $t=e^x$ として置換積分すると, $dt=e^x\,dx$, $dx=\dfrac{1}{t}\,dt$ より,

$$I=\int \frac{1}{t\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,dt=\int \frac{1}{t^2+1}\,dt=\tan^{-1}t+C$$

となる. したがって変数 x の関数へ書き直すと

$$I=\tan^{-1}\left(e^x\right)+C.$$

(8) $I=\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

[解]: $t=e^x$ として置換積分すると, $dt=e^x\,dx$, $dx=\dfrac{1}{t}\,dt$ より,

$$I=\int \frac{t-\frac{1}{t}}{t\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,dt=\int \frac{t^2-1}{t^3+t}\,dt=\int\left(\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{t}\right)\,dt$$

となる. t に関して不定積分を求めると,

$$I=-\log|t|+\log\left|t^2+1\right|+C.$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$I=x+\log\left(1+e^{-2x}\right)+C.$$

(9) $I=\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

[解]: $\tan\frac{x}{2}=t$ として置換積分を行う.

$$dt=\left(\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{2}\right)dx\,,\qquad dx=\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

となる. また, $\sin x=\dfrac{2t}{t^2+1}, \cos x=\dfrac{1-t^2}{t^2+1}$ となることから,

$$I=\int \frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt=\log|t|+C.$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$I=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(10) $I=\displaystyle\int \frac{1}{\cos x+3}\,dx$

[解]: $\tan\frac{x}{2}=t$ として置換積分を行う.

$$dt=\left(\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{2}\right)dx\,,\qquad dx=\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

となる. また, $\sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$ となることから,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{t^2+1}+3} \cdot \frac{2}{t^2+1}\,dx = \int \frac{2}{(t^2+1)\left(\frac{1-t^2}{t^2+1}+3\right)}\,dt = \int \frac{1}{t^2+2}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}t}{2}}{2} + C.
\end{aligned}
$$

変数 x の関数へ書き直すと

$$
I = \frac{\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}}{2}\right)}{2} + C.
$$