置換積分・部分積分　問題1　解答

$\boxed{1}$ 置換積分法を使って次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は C とせよ.

(1) $I = \displaystyle\int x e^{x^2}\, dx$

[解]: $t = x^2$ とおく. $dt = 2x\, dx$ より置換積分法を使うと

$$I = \int \frac{e^t}{2}\, dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

(2) $I = \displaystyle\int \sin x \cos^4 x\, dx$

[解]: $t = \cos x$ とおく. $dt = -\sin x\, dx$ より置換積分法を使うと

$$I = \int \left(-t^4\right)\, dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

(3) $I = \displaystyle\int \frac{\log x}{x}\, dx$

[解]: $t = \log x$ とおく. $dt = \dfrac{1}{x}\, dx$ より置換積分法を使うと

$$I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\log x)^2}{2} + C.$$

(4) $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

[解]: $t = 1 - x^2$ とおく. $dt = -2x\, dx$ より置換積分法を使うと

$$I = \int \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\, dt = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

(5) $I = \displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

[解]: $t = x^2 + 1$ とおく. $dt = 2x\, dx$ より置換積分法を使うと

$$I = \int \frac{1}{2t}\, dt = \frac{\log t}{2} + C = \frac{\log\left(x^2+1\right)}{2} + C.$$

(6) $I = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}\, dx$

[解]: $t = \sin x$ とおく. $dt = \cos x\, dx$ より置換積分法を使うと

$$I = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(\sin x) + C.$$

(7) $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$

[解]: I の被積分関数を変形すると,

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\, dx.$$

ここで $t = x + 1$ とおく. $dt = 1\, dx = dx$ より置換積分法を使うと

$$I = \int \frac{1}{t^2+4}\, dt = \frac{\tan^{-1}\frac{t}{2}}{2} + C = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2} + C.$$

(8) $I=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$

[解]: I の被積分関数を変形すると,

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,dx.$$

ここで $t=x-1$ とおく. $dt=1\,dx=dx$ より置換積分法を使うと

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt=\sin^{-1}\frac{t}{2}+C=\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+C.$$

(9) $I=\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

[解]: $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ として, $x=\sin\theta$ とおく. $dx=\cos\theta\,d\theta$ より置換積分法を使うと

$$\begin{aligned}I&=\int \cos^2\theta\,d\theta=\int\frac{\cos 2\theta+1}{2}\,d\theta\quad(\text{三角関数の半角公式})\\&=\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}+C=\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}+C=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x}{2}+C.\end{aligned}$$

(10) $I=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

[解]: $x=\sinh t$ とおく. 双曲線関数の公式 $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ および $dx=\cosh t\,dt$ より置換積分法を使うと

$$I=\int 1\,dt=t+C=\sinh^{-1}x+C.$$

となる. ここで双曲線関数の定義 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ を使って逆関数を求めると,

$$\sinh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

となる. したがって,

$$I=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$$

$\boxed{2}$ 部分積分法を使って次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は C とせよ.

(1) $I=\displaystyle\int x\sin x\,dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I=\int(-\cos x)'x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

(2) $I=\displaystyle\int x\cos x\,dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I=\int(\sin x)'x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

(3) $I = \displaystyle\int \log x \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + C.$$

(4) $I = \displaystyle\int x \log x \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x \, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

(5) $I = \displaystyle\int x(\log x)^2 \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' (\log x)^2 \, dx = \frac{x^2(\log x)^2}{2} - \int x \log x \, dx$$

となる. 右辺の不定積分の項を求めると,

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

したがって, $I = \dfrac{x^2(\log x)^2}{2} - \dfrac{x^2 \log x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + C.$

(6) $I = \displaystyle\int \sin^{-1} x \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int (x)' \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

となる. 右辺の不定積分の項を求めると,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

したがって, $I = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

(7) $I = \displaystyle\int \cos^{-1} x \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int (x)' \cos^{-1} x \, dx = x \cos^{-1} x - \int \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

となる. 右辺の不定積分の項を求めると,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

したがって, $I = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C.$

(8) $I = \displaystyle\int \tan^{-1} x \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int (x)' \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx$$

となる. 右辺の不定積分の項を求めると,

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{\log(x^2+1)}{2} + C.$$

したがって, $I = x \tan^{-1} x - \dfrac{\log(x^2+1)}{2} + C.$

(9) $I = \displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int (x)' \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \left(-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

となる. 右辺の不定積分の項を計算すると,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \int \frac{-(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= -I + \sin^{-1} x + C. \end{aligned}$$

したがって整理すると, $I = \dfrac{x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x}{2} + C.$

(10) $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2+1} \, dx$

[解]: 部分積分法により,

$$I = \int (x)' \sqrt{x^2+1} \, dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$$

となる. 右辺の不定積分の項を計算すると,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \, dx &= \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int \sqrt{x^2+1} \, dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \\ &= I - \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

したがって整理すると, $I = \dfrac{x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{2} + C.$