有理関数の不定積分　演習問題 1

問 1. $\alpha \in \mathbb{R}$, p を正の整数とする．このとき

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p}$$

を求めよ．

問 2. $a > 0$, q を正の整数とし，

$$I_q = \int \frac{dx}{(x^2+a)^q}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(i) I_1 を求めよ．

(ii) すべての q について

$$I_{q+1} = \frac{1}{2aq}\left((2q-1)I_q + \frac{x}{(x^2+a)^q}\right)$$

が成立することを示せ．

（Hint:

$$\begin{aligned} I_q &= \int \frac{(x^2+a)}{(x^2+a)^{q+1}}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{q+1}}\,dx + a\int \frac{dx}{(x^2+a)^{q+1}} \\ &= \int x\left(-\frac{1}{2q(x^2+a)^q}\right)'\,dx + aI_{q+1} = \cdots \end{aligned}$$

）

問 3. q を正の整数，b, c, β, γ は実数で $\beta^2 - 4\gamma < 0$ をみたすとする．このとき，

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q}\,dx$$

を求めたい．

$$bx+c = \frac{b}{2}(2x+\beta) - \frac{b\beta}{2} + c = \left\{\frac{b}{2}(x^2+\beta x+\gamma)'\right\} + \left\{-\frac{b\beta}{2}+c\right\} \tag{1}$$

という分解に応じて被積分関数は

$$\frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} = \frac{b}{2}\cdot\frac{(x^2+\beta x+\gamma)'}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} + \left(-\frac{b\beta}{2}+c\right)\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} \tag{2}$$

と分けられる．等式 (2) の右辺第 2 項は $x^2+\beta x+\gamma$ を平方完成して

$$\left(-\frac{b\beta}{2}+c\right)\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} = \left(-\frac{b\beta}{2}+c\right)\frac{1}{\left((x+\beta/2)^2+(\gamma-\beta^2/4)\right)^q}$$

と変形され，$t = x+\beta/2$ と置換し $\gamma-\beta^2/4 > 0$ に注意すれば**問 2** へ帰着される．あとは (2) の右辺第 1 項の原始関数を求めればよい．その係数である $b/2$ を無視した

$$\int \frac{(x^2+\beta x+\gamma)'}{(x^2+\beta x+\gamma)^q}\,dx$$

を求めよ．

問 4. 以下を求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x^2 - x - 1}$ (iii) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}\,dx$

(iv) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ (vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$ (viii) $\displaystyle\int \frac{8x-15}{x^2 - 4x + 8}\,dx$ (ix) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3 + x^2 + 2x - 4}\,dx$

問 5. 自分で有理関数を定め，その原始関数を求めよ．また，得られた原始関数を微分し，元の有理関数と一致しているか確かめよ．