有理関数の不定積分　演習問題 1　解答

問 1. $\alpha \in \mathbb{R}$, p を正の整数とする．このとき

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p}$$

を求めよ．

以下，積分定数 C は省略する．

解答. それぞれ定義域において $(\log|x-\alpha|)' = (x-\alpha)^{-1}$, $p \geq 2$ のとき $((x-\alpha)^{-(p-1)})' = (-p+1)(x-\alpha)^{-p}$ であったから，

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p} = \begin{cases} \log|x-\alpha| & (p=1) \\ \dfrac{1}{(-p+1)(x-\alpha)^{p-1}} & (p \geq 2) \end{cases}.$$

■

注意. $p=1$ の場合に注意せよ．

問 2. $a>0$, q を正の整数とし，

$$I_q = \int \frac{dx}{(x^2+a)^q}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(i) I_1 を求めよ．

解答. 主値（取りうる値）を $(-\pi/2, \pi/2)$ に制限した逆正接関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ で表す[*1]と，$(\mathrm{Tan}^{-1}x)' = (x^2+1)^{-1}$ であったから，まず

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{Tan}^{-1}x$$

であったことを思い出そう．

$$\frac{1}{x^2+a} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(x/\sqrt{a})^2+1}\right)$$

より $t = x/\sqrt{a}$ とおいて置換積分すれば

$$I_1 = \int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)\sqrt{a}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{Tan}^{-1}t = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{a}}$$

とわかる．■

(ii) すべての q について

$$I_{q+1} = \frac{1}{2aq}\left((2q-1)I_q + \frac{x}{(x^2+a)^q}\right)$$

[*1] すなわち x に対して $x = \tan y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$ をみたす y を返す関数であった．

が成立することを示せ.

(Hint:

$$
\begin{aligned}
I_q &= \int \frac{(x^2+a)}{(x^2+a)^{q+1}}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{q+1}}\,dx + a\int \frac{dx}{(x^2+a)^{q+1}} \\
&= \int x\left(-\frac{1}{2q(x^2+a)^q}\right)' dx + aI_{q+1} = \cdots
\end{aligned}
$$

)

解答.

$$
\begin{aligned}
I_q &= \int \frac{(x^2+a)}{(x^2+a)^{q+1}}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{q+1}}\,dx + a\int \frac{dx}{(x^2+a)^{q+1}} \\
&= \int x\left(-\frac{1}{2q(x^2+a)^q}\right)' dx + aI_{q+1} \\
&= -\frac{x}{2q(x^2+a)^q} - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2q(x^2+a)^q}\right) dx + aI_{q+1} \\
&= -\frac{x}{2q(x^2+a)^q} + \left(\frac{1}{2q}\right) I_q + aI_{q+1},
\end{aligned}
$$

ここで，4 番目の等号は部分積分による．したがって

$$
I_{q+1} = \frac{1}{2aq}\left((2q-1)I_q + \frac{x}{(x^2+a)^q}\right)
$$

が得られる． ■

注意. 問 2 の結果により，I_1 から $I_2, I_3, \ldots,$ と逐次得られる．

問 3. q を正の整数，b, c, β, γ は実数で $\beta^2 - 4\gamma < 0$ をみたすとする．このとき，

$$
\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q}\,dx
$$

を求めたい．

$$
bx + c = \frac{b}{2}(2x+\beta) - \frac{b\beta}{2} + c = \left\{\frac{b}{2}(x^2+\beta x+\gamma)'\right\} + \left\{-\frac{b\beta}{2} + c\right\} \tag{1}
$$

という分解に応じて被積分関数は

$$
\frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} = \frac{b}{2}\cdot\frac{(x^2+\beta x+\gamma)'}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} + \left(-\frac{b\beta}{2}+c\right)\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} \tag{2}
$$

と分けられる．等式 (2) の右辺第 2 項は $x^2 + \beta x + \gamma$ を平方完成して

$$
\left(-\frac{b\beta}{2}+c\right)\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} = \left(-\frac{b\beta}{2}+c\right)\frac{1}{\left((x+\beta/2)^2 + (\gamma-\beta^2/4)\right)^q}
$$

と変形され，$t = x + \beta/2$ と置換し $\gamma - \beta^2/4 > 0$ に注意すれば問 2 へ帰着される．あとは (2) の右辺第 1 項の原始関数を求めればよい．その係数である $b/2$ を無視した

$$
\int \frac{(x^2+\beta x+\gamma)'}{(x^2+\beta x+\gamma)^q}\,dx
$$

を求めよ．

解答. $t=x^2+\beta x+\gamma$ と置換すれば問 1 の結果から

$$\int \frac{(x^2+\beta x+\gamma)'}{(x^2+\beta x+\gamma)^q}\,dx=\int \frac{dt}{t^q}=\begin{cases}\log t & (q=1)\\ \dfrac{1}{(-q+1)t^{q-1}} & (q\geq 2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\log(x^2+\beta x+\gamma) & (q=1)\\ \dfrac{1}{(-q+1)(x^2+\beta x+\gamma)^{q-1}} & (q\geq 2)\end{cases}$$

が得られる. ■

注意. 仮定より $x^2+\beta x+\gamma>0$ であることに注意せよ. (1), (2) の変形は複雑に見えるかもしれないが, 分子の $bx+c$ を $(x^2+\beta x+\gamma)$ の導関数 $2x+\beta$ が現れるようにして, 定数項を帳尻合わせただけである.

問 4. 以下を求めよ.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x-6}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2-x-1}$ (iii) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

(iv) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ (vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$ (viii) $\displaystyle\int \frac{8x-15}{x^2-4x+8}\,dx$ (ix) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+x^2+2x-4}\,dx$

問 4 の解答を始める前に, 部分分数分解について解説しておく. f, g を整関数（多項式関数）とするとき f/g の形で定まる関数を有理関数という. 有理関数の原始関数は必ず具体的[*2]に求められることを以下に示そう.

まず, (分子の $f(x)$ の次数)$\geq$（分母の $g(x)$ の次数）のときは, $f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $p(x)$, 余りを $r(x)$ とすると $f(x)=p(x)g(x)+r(x)$（($r(x)$ の次数）$<$（$g(x)$ の次数））であるから

$$\frac{f(x)}{g(x)}=p(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$$

となる. 我々は多項式関数 p の原始関数はすでに求められるので, あとは右辺第 2 項の有理関数 r/g の原始関数がわかればよい. したがって最初から (分子の $f(x)$ の次数)$<$（分母の $g(x)$ の次数）と仮定しておこう. このとき有理関数 f/g は次のように分解できることが知られている.

定理. 分母の多項式 $g(x)$ が（実数の範囲で）

$$g(x)=a_0(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\cdots(x-\alpha_\ell)^{p_\ell}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{q_1}(x^2+\beta_2x+\gamma_2)^{q_2}\cdots(x^2+\beta_mx+\gamma_m)^{q_m}$$

（a_0 は $g(x)$ の最高次の係数, 各 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ は実数で $\beta_i^2-4\gamma_i<0$ をみたす）と因数分解されたと

[*2] 初等関数として得られるということ. 有理, 指数, 三角関数から, 加減乗除, 逆関数をとる, 合成する, という操作を有限回施して得られる関数を初等関数という.

する．このとき $f(x)/g(x)$ は実数 $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots$ を用いて

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{a_{i,1}}{x-\alpha_i} + \frac{a_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{a_{i,p_i}}{(x-\alpha_i)^{p_i}} \right) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{b_{i,1}x + c_{i,1}}{x^2+\beta_i x+\gamma_i} + \frac{b_{i,2}x + c_{i,2}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^2} + \cdots + \frac{b_{i,q_i}x + c_{i,q_i}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{q_i}} \right)$$

と表される．

このような分解は，部分分数分解と呼ばれる．すなわち（$f(x)$ の次数）$<$（$g(x)$ の次数）であるとき，$f(x)/g(x)$ は分母の $g(x)$ の因数分解に応じて

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{a}{(x-\alpha)^p} \text{ 型の和} \right) + \left(\frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} \text{ 型の和} \right)$$

と表せるということである．ここで，p は 1 から（$g(x)$ の因数分解における $(x-\alpha)$ の冪）まで，q は 1 から（$g(x)$ の因数分解における $(x^2+\beta x+\gamma)$ の冪）まで現れることに注意せよ．例えば $f(x)$ が 1 次以下の多項式で，$g(x)$ が 2 または 3 次の多項式であった場合，$g(x)$ の因数分解に応じて $f(x)/g(x)$ は以下のような形に必ず分解できるということである．「$(x-\alpha)$ の冪は分子は定数，判別式が負の 2 次式 $(x^2+\beta x+\gamma)$ の冪は分子が 1 次式」と覚えておくとよい．

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}$$

$$g(x) = (x-\alpha)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{(x-\alpha)^2}$$

$$g(x) = x^2+\beta x+\gamma \quad (\beta^2 - 4\gamma < 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma}$$

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{x-\gamma}$$

$$g(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{(x-\alpha)^2} + \frac{c}{x-\beta}$$

$$g(x) = (x-\alpha)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{(x-\alpha)^2} + \frac{c}{(x-\alpha)^3}$$

$$g(x) = (x-\alpha)(x^2+\beta x+\gamma) \quad (\beta^2 - 4\gamma < 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma}$$

部分分数分解を求めたあとは

$$\frac{a}{(x-\alpha)^p}, \quad \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q}$$

らの原始関数を求めればよいが，これは問 1 ∼ 3 の結果および解答内のように求めればよい．

以上を踏まえて，問 4 の解答を与える．

解答． (i) $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ で，

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$$

とおくと，$a = 1/5, b = -1/5$ とわかるので

$$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

とわかった．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-x-6} &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{5}\log|x-3| - \frac{1}{5}\log|x+2| = \frac{1}{5}\log\left|\frac{x-3}{x+2}\right|.\end{aligned}$$

■

(ii) $x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$ で

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

とおくと，$a=1/4$, $b=-1/4$, $c=-1/2$ とわかるので，

$$\frac{1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x+1}\right) \\ &= \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x+1)}.\end{aligned}$$

■

(iii) $2x+1=(x^2+x+1)'$ であるから

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx = \log(x^2+x+1)$$

とわかる． ■

(iv) $2x+3=(x^2+1)'+3$ より

$$\frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1}$$

となる．よって

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = \log(x^2+1) + 3\mathrm{Tan}^{-1}x.$$

■

(v) $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ であるから

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \mathrm{Tan}^{-1}(x+1).$$

■

(vi) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であり，

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

とおくと $a = 1/3$, $b = -1/3$, $c = 2/3$ わかるから，

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$$

となる．さらに $x - 2 = (1/2)(2x-1) - 3/2 = (1/2)(x^2-x+1)' - 3/2$, $x^2 - x + 1 = (x-1/2)^2 + 3/4$ であるから，結果として

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\right)$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

■

(vii)

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

とおくと，$a = -1/2$, $b = c = 1/2$, $d = 0$ とわかる．よって

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

さらに $x = (1/2)(2x) = (1/2)(x^2+1)'$ であるから，

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right)$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{4}\log(x^2+1)\end{aligned}$$

となる． ■

(viii) $8x - 15 = 4(2x-4) + 1 = 4(x^2-4x+8)' + 1$, $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4$ であるから

$$\frac{8x-15}{x^2-4x+8} = 4\left(\frac{(x^2-4x+8)'}{x^2-4x+8}\right) + \frac{1}{(x-2)^2+4}$$

とわかる．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{8x-15}{x^2-4x+8}\,dx &= 4\int \frac{(x^2-4x+8)'}{x^2-4x+8}\,dx + \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} \\ &= 4\log(x^2-4x+8) + \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right).\end{aligned}$$

■

(ix) $x^3 + x^2 + 2x + 4 = (x-1)(x^2+2x+4)$ であり，

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+4)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+4}$$

とおくと $a = b = 1,\ c = 2$ とわかる．よって

$$\frac{2x^2+3x+2}{x^3+x^2+2x+4} = \frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+2x+4}.$$

また，$x+2 = (1/2)(2x+2)+1 = (1/2)(x^2+2x+4)'+1$, $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$ より

$$\frac{2x^2+3x+2}{x^3+x^2+2x+4} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4}\right) + \frac{1}{(x+1)^2+3}$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+x^2+2x+4}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4}\,dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2+3} \\ &= \log|x-1| + \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

■

問 5. 自分で有理関数を定め，その原始関数を求めよ．また，得られた原始関数を微分し，元の有理関数と一致しているか確かめよ．

解答. 我々は原始関数を求めているのだから，得られた関数を微分すると元の関数にもどるはずである．例えば問 4(ix) で

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+x^2+2x+4}\,dx = \log|x-1| + \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

を得たが，実際確かに

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\log|x-1| + \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+2x+4}\right)\cdot(2x+2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{((x+1)/\sqrt{3})^2+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x^2+2x+4} = \frac{2x^2+3x+2}{x^3+x^2+2x+4}\end{aligned}$$

となる．

注意. 有理関数の原始関数は必ず具体的に得られるので，自分でいくらでも作問することができ，また，得られた原始関数を微分することで検算もできる．