§1 数列・関数の極限，連続性　演習問題2

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

1 (★☆☆)(**数列の極限 1**)

次の極限値を求めよ：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{1-5n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}$

2 (★★☆)(**数列の極限 2**)

はさみうちの原理を用いて，次の極限値を求めよ：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

3 (★★☆)(**数列の極限 3**) 次の数列の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\frac{5n+4}{2n+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(5n+4)}{\log(2n+1)}$

4 (★★☆)(**数列の極限 4**)

$0<b\leqq a$ とする．連立漸化式

$$a_1:=a,\quad b_1:=b,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n),\quad b_{n+1}:=\sqrt{a_nb_n}\ (n=1,2,\ldots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

(1)　命題 $\mathbf{P}_n$ ：$0<b_1\leqq b_2\leqq\cdots\leqq b_n\leqq a_n\leqq\cdots\leqq a_2\leqq a_1\quad(n=1,2,\ldots)$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ．

(2)　“有界な単調数列は収束する”という事実を用いて，上式で定まる $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は同一の極限値に収束することを示せ．

5 (★★★)(**Giaquinta-Giusti の補題**)

$0<\varrho<R$ とし，$w(t)$ を閉区間 $[\varrho,R]$ 上で定義された有界な非負値函数とする．$w(t)$ は任意の $\varrho\leqq s<t\leqq R$ に対して

$$w(t)\leqq\frac{1}{2}w(s)+\frac{C}{(s-t)^{\alpha}}\qquad\cdots\circledast$$

を満たしているとする．ここに, $C > 0$, $\alpha > 0$ は定数とする．このとき, α に依存する正の定数 $c \equiv c(\alpha) > 0$ が存在して,

$$w(\varrho) \leqq c(\alpha)\frac{C}{(R-\rho)^{\alpha}}$$

が成り立つことを, 次のような数列 $\{t_i\}_{i \geqq 0}$ を考えることにより示せ:

$$\begin{cases} t_0 = \varrho, \\ t_{i+1} - t_i = (1-\lambda)\lambda^i(R-\varrho), \end{cases}$$

ただし，$0 < \lambda < 1$ はあとで定めるパラメーター.