§1 数列・関数の極限，連続性　演習問題２　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

1 (★☆☆)(数列の極限 1)

次の極限値を求めよ：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{1-5n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}$

解 (1)~(4) すべて直接計算により求められる．

(1)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}&=\frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}{(n+3)-(n+2)}\\&=\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\\&=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\xrightarrow{n\to\infty}1.\end{aligned}$$

(2)

$$\frac{\sqrt{n^2+5}}{1-5n}=\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}}{\frac{1}{n}-5}\xrightarrow{n\to\infty}-\frac{1}{5}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}&=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\\&=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\xrightarrow{n\to\infty}1\cdot e=e.\end{aligned}$$

(4)

$$\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}=\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2}\right\}^{2}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{e^2}.$$

∎

2 (★★☆)(数列の極限 2)

はさみうちの原理を用いて，次の極限値を求めよ：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

解 (1) $N \geqq 6$ を満たす自然数 N を固定する．任意の $k=1,2,\ldots$ に対して

$$\frac{3}{N+k} < \frac{3}{N} \leqq \frac{1}{2}$$

が成り立つ．ゆえに，すべての $n \geqq N$ に対して

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3^N}{N!}\cdot\overbrace{\underbrace{\frac{3}{N+1}}_{<\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{3}{N+2}}_{<\frac{1}{2}}\cdots\underbrace{\frac{3}{N}}_{<\frac{1}{2}}}^{n-N\ \text{times}} < \frac{3^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

従って，挟み撃ちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0.$

(2) $4^n < 2^n+3^n+4^n < 4^n+4^n+4^n = 3\cdot 4^n$ であるから，両辺 $1/n$ 乗して

$$4 < (2^n+3^n+4^n)^{1/n} < 3^{1/n}4 \xrightarrow{n\to\infty} 4.$$

従って，挟み撃ちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{1/n}=4.$

∎

3 (★★☆)(数列の極限 3)

次の数列の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\frac{5n+4}{2n+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(5n+4)}{\log(2n+1)}$

解 (1)

$$\log\frac{5n+4}{2n+1} = \log\frac{5+\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \log\frac{5}{2}.$$

(2) $a,b>0$ を定数として，$\chi_{a,b}(n) := \log(an+b)$ とおく．このとき，$\chi_{a,b}(n) = \log(an)+\log\left(1+\frac{b}{an}\right)$ と変形できるから，

$$\frac{1}{\log n}\chi_{a,b}(n) = \frac{\log a}{\log n}+1+\frac{\log\left(1+\frac{b}{an}\right)}{\log n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

よって，

$$\frac{\log(5n+4)}{\log(2n+1)} = \frac{\frac{1}{\log n}\chi_{5,4}(n)}{\frac{1}{\log n}\chi_{2,1}(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

∎

4 (★★☆)(数列の極限 4)

$0 < b \leqq a$ とする．連立漸化式

$$a_1 := a, \quad b_1 := b, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \ (n = 1, 2, \ldots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．
(1) 命題 $\mathbf{P}_n$ ： $0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n \leqq a_n \leqq \cdots \leqq a_2 \leqq a_1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ．

(2) “有界な単調数列は収束する” という事実を用いて，上式で定まる $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は同一の極限値に収束することを示せ．

解 (1) 命題 $\mathbf{P}_n$ ： $0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n \leqq a_n \leqq \cdots \leqq a_2 \leqq a_1$ がすべての n に対して成り立つことを n に関する数学的帰納法により示す．
・$\mathbf{P}_1$ は明らか．
・ある n で $\mathbf{P}_n$ が成立すると仮定．相加相乗平均の不等式より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \geqq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1} \cdots ①.$$

また帰納法の仮定 $\mathbf{P}_n$ より $0 < b_n \leqq a_n$ が成り立っているので

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \leqq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \cdots ②, \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqq \sqrt{b_n^2} = b_n \cdots ③. \end{cases}$$

①,②,③より $0 < b_n \leqq b_{n+1} \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ が言えるから，$\mathbf{P}_{n+1}$ も成り立つ．

(2) 命題 $\mathbf{P}_n$ より $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ単調増加数列，単調減少数列であり，$|a_n|, |b_n| \leqq a_1 = a$ であるから，ともに有界．従って，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し，$\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$，$\beta := \lim_{n\to\infty} b_n$ とおくと

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ \beta = \sqrt{\alpha\beta} \end{cases} \cdots ④.$$

$④_1$ より $\alpha = \beta$ であり，同時に$④_2$ も満たす．以上より，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は同一の極限値に収束する． ∎

5 (★★★)(Giaquinta-Giusti の補題)

$0 < \varrho < R$ とし，$w(t)$ を閉区間 $[\varrho, R]$ 上で定義された有界な非負値函数とする．$w(t)$ は任意の $\varrho \leqq s < t \leqq R$ に対して

$$w(t) \leqq \frac{1}{2}w(s) + \frac{C}{(s-t)^{\alpha}} \qquad \cdots (*)$$

を満たしているとする．ここに，$C > 0$，$\alpha > 0$ は定数とする．このとき，α に依存する

正の定数 $c \equiv c(\alpha) > 0$ が存在して,

$$w(\varrho) \leqq c(\alpha)\frac{C}{(R-\rho)^\alpha}$$

が成り立つことを, 次のような数列 $\{t_i\}_{i\geqq 0}$ を考えることにより示せ:

$$\begin{cases} t_0 = \varrho, \\ t_{i+1} - t_i = (1-\lambda)\lambda^i(R-\varrho), \end{cases}$$

ただし，$0 < \lambda < 1$ はあとで定めるパラメーター.

解 $\begin{cases} t_0 = \varrho, \\ t_{i+1} - t_i = (1-\lambda)\lambda^i(R-\varrho) \end{cases}$ で定まる数列 $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を考える. 関係式 ⊛ を帰納的に用いると,

$$\begin{aligned} w(\varrho) = w(t_0) &\overset{\circledast}{\leqq} \frac{1}{2}w(t_1) + \frac{C}{(t_1-t_0)^\alpha} \\ &\overset{\circledast}{\leqq} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}w(t_2) + \frac{C}{(t_2-t_1)^\alpha}\right] + \frac{C}{(t_1-t_0)^\alpha} \\ &= \frac{1}{4}w(t_2) + \frac{C}{(1-\lambda)^\alpha(R-\varrho)^\alpha}\left(\frac{1}{2\lambda}+1\right) \\ &\overset{\circledast}{\leqq} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}w(t_3) + \frac{C}{(t_3-t_2)^\alpha}\right] + \frac{C}{(1-\lambda)^\alpha(R-\varrho)^\alpha}\left(\frac{1}{2\lambda}+1\right) \\ &= \frac{1}{8}w(t_3) + \frac{C}{(1-\lambda)^\alpha(R-\varrho)^\alpha}\left(\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{2\lambda}+1\right) \end{aligned}$$

といった具合になるので, これを k 回繰り返すと,

$$w(\varrho) \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^k w(t_k) + \frac{C}{(1-\lambda)^\alpha(R-\varrho)^\alpha}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2\lambda^\alpha}\right)^i \quad \cdots \heartsuit$$

を得る. そこで今, パラメーター $\lambda \in (0,1)$ を

$$\frac{1}{2\lambda^\alpha} < 1 \iff \lambda > \frac{1}{2^{1/\alpha}}$$

となるように選ぶと, 無限級数 $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\lambda^\alpha}\right)^i$ は収束するので, これを $S = S(\alpha)$ とおく. さらに, $t_{i+1} - t_i = (1-\lambda)\lambda^i(R-\varrho)$ より,

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(1-\lambda)\lambda^i(R-\varrho) \\ &= \varrho + (1-\lambda)(R-\varrho)\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda} = \varrho + (R-\varrho)(1-\lambda^k) \end{aligned}$$

だから, $t_k \xrightarrow{k\to\infty} R$. 従って, $\heartsuit$の両辺で $k \to \infty$ と送ると,

$$w(\varrho) \leqq \frac{C}{(1-\lambda)^\alpha (R-\varrho)^\alpha} S(\alpha).$$

最後に, λ が α に依存して決まることに注意して, $c := \dfrac{S(\alpha)}{(1-\lambda)^\alpha}$ とおくと, c は α のみに依存し, 最終的に, 所望の不等式

$$w(\varrho) \leqq c\frac{C}{(R-\rho)^\alpha}$$

が得られ, 証明が完了した. ∎

一言メモ ✐ Giaquinta, Giusti ともに解析学の分野で特に顕著な業績を上げているイタリアの数学者である. この補題は見かけ上易しくみえるが, 変分学および偏微分方程式の解の正則性理論という分野で大活躍するとても有用な補題である.