数列の極限，関数の極限　解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の数列の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=4$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{1+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}=3$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{\sqrt{1+n^2+n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1+n}}=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}=0$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2\cdot n^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}\cdot\frac{1}{n^{n-2}}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(1+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+\frac{n}{3!}+\cdots}=0$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{(1+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{1+\cdots+\frac{n^6-\cdots}{6!}+\cdots}=0$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n-1)\cdots(n+1)}=0$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{2n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{100^n}{n!}$

n は大きい場合だけ考えればよいので，$n>200$ とすると，

$$\frac{100^n}{n!}=\frac{100^{199}}{199!}\cdot\frac{100}{200}\cdot\frac{100}{201}\cdots\frac{100}{n}\leqq\frac{100^{199}}{199!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-199}\to 0\quad(n\to\infty)$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{100^n}{n!}=0$

(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log n-\log(n+1))=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n}{n+1}=\log 1=0$

(13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log(3n^2-2n+1)-\log(n^2+n-1))=\lim_{n\to\infty}\log\frac{3n^2-2n+1}{n^2+n-1}$

$\displaystyle=\log\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\log 3$

(14) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right|\leqq\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}=0$

(15) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{3n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{3}{n+\frac{1}{n}}=\cos 0=1$

(16) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\tan\frac{n\pi}{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\tan\frac{\pi}{4+\frac{2}{n}}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

(17) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+5)-(2n-1)}{\sqrt{2n+5}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{2n+5}+\sqrt{2n-1}}=0$

(18) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+5}-\sqrt{n^2+n+2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+2n+5)-(n^2+n+2)}{n(\sqrt{2n^2+2n+5}+\sqrt{n^2+n+2})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+3}{n(\sqrt{2n^2+2n+5}+\sqrt{n^2+n+2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}$

$\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

2 次の関数の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+x-1)=2^3-3\cdot 2^2+2-1=-3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+4}{x^2-x+1}=1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)(x+4)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x-1}\,(x+4)}{\sqrt{x+1}}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-x+4}-\sqrt{x^2+2x+2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2-x+4)-(x^2+2x+2)}{(x-1)(\sqrt{2x^2-x+4}+\sqrt{x^2+2x+2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(\sqrt{2x^2-x+4}+\sqrt{x^2+2x+2})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(\sqrt{2x^2-x+4}+\sqrt{x^2+2x+2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{\sqrt{2x^2-x+4}+\sqrt{x^2+2x+2}}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$

$f(x)=\cos 2x$ とおくと

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

であるから，問題の極限は $f'(0)$ に等しい。$f'(x)=-2\sin 2x$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}=-2\sin 0=0$$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$

$f(x)=e^x$ とおくと

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

であるから，問題の極限は $\dfrac{1}{f'(0)}$ に等しい。$f'(x)=e^x$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{e^0}=1$$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)-(2^x-1)}{x}$

一般に $a>0$ に対して $f(x)=a^x$ とおくと

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

であり，$f'(x)=a^x\log a$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)-(2^x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right)=\log 3-\log 2$$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\log x}$

$f(x)=\log x$ とおくと

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$$

であるから，問題の極限は $\dfrac{1}{f'(1)}$ に等しい。$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ であるから $\dfrac{1}{f'(x)} = x$ で

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\log x} = 1$$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}(\log(x^2+4x-5) - \log(x^3-2x+1)) = \lim_{x\to 1+0}\log\frac{x^2+4x-5}{x^3-2x+1}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 1+0}\log\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x^2+x-1)} = \lim_{x\to 1+0}\log\frac{x+5}{x^2+x-1} = \log\frac{6}{1} = \log 6$