

§1 集合と論理 演習問題 #3

問題の難易度の目安【易】☆☆☆ 【基礎】★★☆ 【標準】★★★

問題を解くにあたり，次の**鳩の巣原理** (Pigeonhole Principle) について述べておく．



鳩の巣原理 n, m を自然数, $n > m$ とする. n 個のものを m 組に分けるととき, 少なくとも 1 つの組は 2 個以上のものを含む.

1 (☆☆☆) (鳩の巣原理を用いた証明①)

$3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ の正方形内に, 10 個の点を打つ. それら点の中で距離が $\sqrt{2}\text{ cm}$ 未満となる 2 点が存在することを証明せよ.

2 (☆☆☆) (鳩の巣原理を用いた証明②)

a, b, c, d, e を相異なる 5 つの整数とする. このとき, この中から 2 つの整数を選んで, その差を 4 の倍数とすることができることを示せ.

3 (★★☆) (鳩の巣原理を用いた証明③)

xyz 空間で, その座標がすべて整数であるような点を格子点という. 座標空間に 9 個の格子点を与えられたとき, そのうちの 2 点の midpoint がまた格子点であるものが少なくとも 1 組存在することを示せ.

4 (★★★★) (ディリクレ Dirichlet の定理)

ω を与えられた無理数とする.

(1) 任意の自然数 n に対して

$$0 < y \leq n, \quad |x - \omega y| < \frac{1}{n}$$

となる整数 (x, y) が少なくとも 1 組存在することを示せ.

(2) (1) を用いて, $|x - \omega y| < \frac{1}{y}$ となる整数 x, y が無数に存在することを示せ.