§1 集合と論理　演習問題 #2　解答

問題の難易度の目安【易】★☆☆　【基礎】★★☆　【標準】★★★

$\boxed{1}$ (★★☆) (背理法を用いた不等式の証明①)

4 つの正数 a, b, c, d について，$a = b = c = d$ でないならば，4 つの実数 $a(1-b)$, $b(1-c)$，$c(1-d)$，$d(1-a)$ のうち，少なくとも 1 つは $\dfrac{1}{4}$ より小さいことを証明せよ．

解答

P：「$a = b = c = d$ でない」

Q：「$a(1-b), b(1-c), c(1-d), d(1-a)$ のうち, 少なくとも 1 つは $\frac{1}{4}$ より小さい」

とおく．P $\Longrightarrow$ Q を証明するため P かつ $\overline{\mathrm{Q}}$，すなわち「$a = b = c = d$ でない」かつ「$a(1-b), b(1-c), c(1-d), d(1-a)$ はすべて $\frac{1}{4}$ 以上である」$\cdots$①と仮定して矛盾を導く．①より

$$a(1-b) \geqq \frac{1}{4},\quad b(1-c) \geqq \frac{1}{4},\quad c(1-d) \geqq \frac{1}{4},\quad d(1-a) \geqq \frac{1}{4}\qquad \cdots ①'$$

であるから，すべて掛け合わせると

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c)d(1-d) \geqq \left(\frac{1}{4}\right)^4 \qquad \cdots ②.$$

ここで $a, b, c, d > 0$ と ①′ より $0 < a, b, c, d < 1$ であることに注意する．相加相乗平均の不等式より，$0 < x < 1$ をみたす任意の x に対して

$$\frac{1}{2} = \frac{x + (1-x)}{2} \geqq \sqrt{x(1-x)} \quad \therefore\ \frac{1}{4} \geqq x(1-x).$$

等号成立は $x = 1 - x$，すなわち $x = \frac{1}{2}$ のときに起こる．ゆえに，$x = a, b, c, d$ としてこの不等式を用いると

$$\frac{1}{4} \geqq a(1-a),\quad \frac{1}{4} \geqq b(1-b),\quad \frac{1}{4} \geqq c(1-c),\quad \frac{1}{4} \geqq d(1-d)\qquad \cdots ③$$

を得る．これらの 4 つの不等式すべてにおいて等号成立が起こる (すなわち $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ を含む) 場合

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \geqq a(1-a)b(1-b)c(1-c)d(1-d)$$

が成り立つが，仮定の「$a = b = c = d$ でない」より，③の少なくとも 1 か所は等号成立が起こらないので，結局

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 > a(1-a)b(1-b)c(1-c)d(1-d)$$

が成り立つ．しかし，これは②に矛盾する．

ゆえに，背理法により P $\Longrightarrow$ Q は成り立つ．∎

$\boxed{2}$ (★★☆) (背理法を用いた不等式の証明②)

a, b を実数とする．$f(x) = x^2 + ax + b$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対し，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を $M_{a,b}$ とする．このとき $M_{a,b} \geqq \frac{1}{2}$ であることを示せ．

解答 $M_{a,b} < \frac{1}{2}$ と仮定して矛盾を導く．すなわち，

$$\text{すべての } x \ (-1 \leqq x \leqq 1) \text{に対して，} |f(x)| < \frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

であると仮定する．①はすべての x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ で成り立っているから，特に $x = 1, -1$ のときも成り立ち，

$$\begin{aligned} & |f(1)| < \frac{1}{2}, \quad |f(-1)| < \frac{1}{2} \\ \iff & |1 + a + b| < \frac{1}{2}, \quad |1 - a + b| < \frac{1}{2} \\ \iff & -\frac{1}{2} < 1 + a + b < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < 1 - a + b < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る．これら 2 つの不等式を足して

$$-1 < 2 + 2b < 1 \qquad \therefore \ -\frac{3}{2} < b < -\frac{1}{2}$$

ところがこれは

$$|f(0)| = |b| > \frac{1}{2}$$

を意味しており，①に矛盾．ゆえに，$M_{a,b} \geqq \dfrac{1}{2}$ である． ■

$\boxed{3}$ (★★☆) (背理法の妙③)

空集合は任意の集合の部分集合であることを示せ．

解答 任意の集合 X に対し，$\varnothing \subset X \cdots ①$ であることを示せばよい．$\varnothing \not\subset X$ となる集合 X が存在したとしよう．するとこのとき，

$$x \in \varnothing \quad \text{かつ} \quad x \notin X$$

となる要素 x が存在することになるが，これは空集合の定義に反する．よって，任意の集合 X に対し $\varnothing \subset X$ である． ■

【別解】 背理法を経由せず，次のように示すこともできる：

(①のつづきから)

①すなわち「$\forall x :\ x \in \varnothing \Longrightarrow x \in X$」を示せば良い．ところで，仮定の $x \in \varnothing$ は偽であるから，命題「$\cdots$」は真である．ゆえに①は成り立つ．

$\boxed{4}$ (★★★) (背理法の妙④)

関数 $f(x)$ は区間 $[a,\, b]$ 上連続であり，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}$ をみたしているとする．このとき $f(x_0) = x_0$ となる $x_0 \in [a, b]$ が存在することを示せ．

解答 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2} \iff \int_a^b (f(x) - x)\ dx = 0 \cdots$ ① に注意する．$f(x_0) = x_0$ となる $x_0 \in [a, b]$ が存在しないと仮定すると，

$$\text{すべての } x \in [a, b] \text{ に対して } f(x) - x \neq 0 \quad \cdots ②.$$

いま $F(x) := f(x) - x$ とおくと．$F(x)$ は $[a, b]$ 上連続であり，②より $F(x) \neq 0$ であるから，$[a, b]$ 上 $F(x) > 0$ または $F(x) < 0$ が成り立つ．前者の場合，積分の正値性より $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx > 0$ で①に矛盾．後者の場合も同様に $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx < 0$ で①に矛盾する．したがって，$f(x_0) = x_0$ となる $x_0 \in [a, b]$ が存在する． ■