

§1 集合と論理 演習問題 #1

📖 問題の難易度の目安【易】☆☆☆ 【基礎】★★☆ 【標準】★★★

1 (☆☆☆) (何者だ (有名問題))

タヌキは正直者で、キツネは嘘つき者である。A, Bはタヌキかキツネであることは分かっているが、どちらかはっきりしない。Aがこう言った：

『私がタヌキなら、Bもタヌキです』

A, Bの正体について、正しいのは次のうちどれか。

- ① A, Bともにタヌキ.
- ② Aはタヌキ, Bはキツネ.
- ③ Aはキツネ, Bはタヌキ.
- ④ A, Bともにキツネ.

2 (☆☆☆) (存在命題の証明)

『ある実数 x に対して $x^2 - x < 0$ が成り立つことを証明せよ』という問題に対して Xさんが次のように解答したが、Xさんの解答は誤りである。どこが間違っているか指摘し、正しく訂正せよ。

【Xさんの解答】 $x^2 - x = x(x - 1)$ であるから、 $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して $x^2 - x < 0$ である。したがって、ある実数 x に対して $x^2 - x < 0$ が成り立つ。

3 (★★☆) (背理法の妙①)

a を実数とする。このとき任意の $\gamma > 0$ に対して $|a| \leq \gamma$ ならば、 $a = 0$ であることを背理法によって示せ。

4 (★★★) (背理法の妙②)

x を $x^3 = 3$ を満たす実数とする。

- (1) x は無理数であることを背理法を用いて示せ。
- (2) α, β は有理数とする。すべての α, β に対して $x^2 + \alpha x + \beta \neq 0$ が成り立つことを示せ。