§1 集合と論理　演習問題 #1　解答

問題の難易度の目安【易】★☆☆　【基礎】★★☆　【標準】★★★

1 (★☆☆) (何者だ (有名問題))

タヌキは正直者で，キツネは嘘つき者である．A, B はタヌキかキツネであることは分かっているが，どちらかはっきりしない．A がこう言った：

『私がタヌキなら, B もタヌキです』

A, B の正体について，正しいのは次のうちどれか．
① A, B ともにタヌキ．
② A はタヌキ，B はキツネ．
③ A はキツネ，B はタヌキ．
④ A, B ともにキツネ．

解答 A の発言『私がタヌキなら, B もタヌキです』を ㊎ とおく．命題 p, q を

$$p: \quad Aはタヌキ, \qquad q: \quad Bはタヌキ$$

で定め，真理表に書くと次のようになる：

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A がキツネ (命題 p が偽，すなわち真理値 0 をとる) の場合，上の真理表から発言 ㊎ は必ず真となる．ところが，A はキツネであるから嘘つきであり，したがって発言 ㊎ は偽にならなくてはならず，不合理．ゆえに，A はタヌキである．タヌキは正直者だから発言 ㊎ は必ず真．よって上の真理表から命題 q は真，すなわち B はタヌキ．

以上まとめて，A, B ともにタヌキの①が正解である．■

2 (★☆☆) (存在命題の証明)

『ある実数 x に対して $x^2 - x < 0$ が成り立つことを証明せよ』という問題に対して X さんが次のように解答したが，X さんの解答は誤りである．どこが間違っているか指摘し，正しく訂正せよ．

【X さんの解答】$x^2 - x = x(x-1)$ であるから，$0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して $x^2 - x < 0$ である．したがって，ある実数 x に対して $x^2 - x < 0$ が成り立つ．

解答 上の X さんの解答は，実数 x が $1 < x < 2$ を満たせば，$x^2 - x < 0$ を満たすことを述べているに過ぎず，そのような実数 x が**実際に存在するかどうかについては何も示していない**点が間違いである．正しくは次のように修正する：

【修正版】$x = \dfrac{1}{2}$ とすれば $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4} < 0$ であるから*，ある実数 x に対して $x^2 - x < 0$ が成り立つ． ■

$\boxed{3}$ (★★☆)（背理法の妙①）

a を実数とする．このとき任意の $\gamma > 0$ に対して $|a| \leqq \gamma$ ならば，$a = 0$ であることを背理法によって示せ．

解答 まず，命題を論理記号を用いて表すと，

$$\forall\gamma : |a| \leqq \gamma \implies a = 0.^{\dagger}$$

$p : \forall\gamma : |a| \leqq \gamma$，$q : a = 0$ とおく．背理法とは，$p \wedge \bar{q}$ と仮定して矛盾を導くことだから，

$$p \wedge \bar{q} : (\forall\gamma : |a| \leqq \gamma) \text{ かつ } a \neq 0 \quad \cdots ①$$

と仮定する．このとき，$a \neq 0 \cdots ㊀$ より $|a| > 0$ であり，①において γ は任意であるから，特に $\gamma = \dfrac{|a|}{2}$ ととれば

$$|a| \leqq \frac{|a|}{2} \iff |a| \leqq 0 \quad \cdots ③.$$

a は実数だから $|a| \geqq 0$ であることに注意して，③と合わせると $a = 0$ となるが，これは㊀に矛盾する．したがって背理法により，与えられた命題 $p \implies q$ は成り立つ (真である)． ■

$\boxed{4}$ (★★★)（背理法の妙②）

x を $x^3 = 3$ を満たす実数とする．

(1) x は無理数であることを背理法を用いて示せ．

(2) α, β は有理数とする．すべての α, β に対して $x^2 + \alpha x + \beta \neq 0$ が成り立つことを示せ．

解答 (1) x が有理数であると仮定して矛盾を導く．$x^3 = 3$ より $x > 0$ であることに注意して，$x = \dfrac{n}{m}$（ただし，m, n は**互いに素な自然数**‡）とおくことができる．このとき $\left(\dfrac{n}{m}\right)^3 = 3$ より $n^3 = 3m^3 \cdots ①$．ゆえに，n^3 は 3 の倍数である．3 を法とする合同式を考えることで次の表を得る．

n	n^3
$0 \pmod 3$	$0 \pmod 3$
$1 \pmod 3$	$1 \pmod 3$
$2 \pmod 3$	$1 \pmod 3$

*ここで $\frac{1}{2}$ が存在命題を成り立たせる例であることが示されている．
†$\forall\gamma$ は**任意の** γ という意味を表す記号である．
‡2 つの整数が互いに素であるとは，最大公約数が 1 のことをいう．

この表から n^3 が 3 の倍数すなわち $n^3 \equiv 0 \pmod 3$ であるのは $n \equiv 0 \pmod 3$ のときに限ることがわかる．ゆえに，n は 3 の倍数であるから，$n = 3n'$ とおいて，①へ代入すると $9(n')^3 = m^3$．よって今度は m^3 が 3 の倍数となるが，再び上の表を用いると，これは m が 3 の倍数であることと同値．以上の議論より m, n はどちらも 3 の倍数となるが，これは m と n が互いに素であることに矛盾する．したがって，x は無理数である．

(2)　ここで示すべきことは次である．(1) の結果を用いて，命題 p, q を

$$p:\ x\text{ は }x^3 = 3\text{ を満たす無理数},\quad q:\ \forall\alpha, \forall\beta \in \mathbb{Q}\ :\ x^2 + \alpha x + \beta \neq 0$$

とおくとき，$p \Longrightarrow q$ **を示す**ことである．ただし $\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合である．結論 q を否定すると，

$$\bar{q}\ :\ \exists\alpha,\ \exists\beta \in \mathbb{Q}\ :\ x^2 + \alpha x + \beta = 0 \quad \cdots ②.$$

となることに注意する．以下，**②を仮定して矛盾を導く（もっと詳しく言うならば p かつ②を仮定して）**．②より $x^2 = -\alpha x - \beta \cdots ③$．この両辺に x をかけて $3 = x^3 = -\alpha x^2 - \beta x$．これに③を代入整理すれば

$$(\alpha^2 - \beta)x = 3 - \alpha\beta \quad \cdots ④.$$

ここで $\alpha^2 - \beta, 3 - \alpha\beta$ ともに有理数を表す．いま $\alpha^2 - \beta \neq 0$ とすれば，$x = \dfrac{3 - \alpha\beta}{\alpha^2 - \beta}$ となるが，左辺は無理数，右辺は有理数となり不合理．したがって，$\alpha^2 - \beta = 0 \cdots ⑤$．これを④へ代入すると $\alpha\beta = 3 \cdots ⑥$．⑤,⑥より β を消去すれば $\alpha^3 = 3$ に逢着する．ところが (1) の結果より α は無理数となってしまい，これは元々 α が有理数であることに矛盾する．したがって背理法により命題 $p \Longrightarrow q$ は成り立つ (真である)．　■