高校生のための微分方程式入門

1　微分方程式とは

関数 $y(x)$ やその微分 $y'(x), y''(x), \ldots$ についての方程式を**微分方程式**といいます。たとえば指数関数 $y(x) = e^x$ については,

$$(e^x)' = e^x$$

が成り立ちますから，$y(x) = e^x$ は微分方程式

$$y' = y \tag{1.1}$$

をみたす，と言うことができるわけです。微分方程式をみたす関数のことを，その微分方程式の**解**といいます。

$$e^x \text{ は微分方程式 (1.1) の解である}$$

というわけです。そして微分方程式の解を求めることを，微分方程式を**解く**といいます。なぜ微分方程式を考えるのか，ということはあとで述べることにして，ここでは簡単な微分方程式をいろいろさわってみて，様子を把握することにしましょう。

最も簡単と思われる微分方程式として

$$y' = 0 \tag{1.2}$$

を考えてみましょう。定数は微分して 0 になるので，$y(x) = C$（定数）は微分方程式 (1.2) の解です。平均値の定理を使うと，微分方程式 (1.2) の解はこれ以外にないことがわかります。しかし定数 C の取り方は無数にあるので，この簡単な例から，微分方程式の解は 1 つとは限らず，無限個あるかもしれないことに気付きますね。

もう 1 つ簡単な例を見てみましょう。

$$y' = 1 \tag{1.3}$$

$y(x) = x$ がこの微分方程式の解になることはすぐわかります。さらに考えると,

$$y(x) = x + C \quad (C \text{ は定数})$$

も解になります。この形は，不定積分のときによく見かけるものです。よく考えると，微分方程式 (1.3) を解くということは，不定積分

$$\int 1\,dx$$

を求めよ，ということと同じですね。一般にいうと，$f(x)$ を何らかの与えられた関数とするとき，微分方程式

$$y' = f(x) \tag{1.4}$$

は，不定積分

$$\int f(x)\,dx$$

をせよということと同じです。そして不定積分の結果は任意定数 C を用いて $F(x)+C$ のように表されますから，微分方程式 (1.4) の解は C の取り方の分だけ（無限個）あるということがわかります。

それでは次に，不定積分とは違う微分方程式を見てみましょう。

$$y'y = x \tag{1.5}$$

この微分方程式を解くにはアイデアが必要です。積の微分法の公式から

$$(y^2)' = 2yy'$$

が得られることに気付くと，微分方程式 (1.5) は

$$(y^2)' = 2x$$

と書き換えられます。するとこれは (1.4) のタイプの微分方程式になりましたから，不定積分することで

$$y(x)^2 = x^2 + C$$

が得られます。ほしいのは $y(x)$ でしたから，両辺の平方根を取って

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}$$

として解が得られました。この場合も C は任意定数なので，解は無限個あります。

問 1　次の微分方程式を解け。

(1)　$y'y = \dfrac{1}{2}$　　(2)　$y'y^2 = 1$　　(3)　$\dfrac{y'}{y^2} = 1$

2 階微分 y'' も現れる微分方程式を 1 つ挙げましょう。a を定数とします。

$$y'' + ay = 0 \tag{1.6}$$

この微分方程式の解は完全に求められるのですが，発見的考察をしてみましょう。

まず $a = 0$ の場合を考えます。微分方程式は

$$y'' = 0$$

となりますが，これを

$$(y')' = 0$$

と見ると，y' についての微分方程式 (1.2) と思えるので，答は任意定数 C を用いて

$$y' = C$$

で与えられます。こうして得られたのはまた (1.4) のタイプの微分方程式なので，不定積分で解けて，

$$y(x) = Cx + D$$

が得られます。C, D は任意定数です。こうして任意定数を 2 つ含む解が得られました。

次に $a < 0$ の場合を考えます。はじめの例に挙げた指数関数 e^x は，何回微分しても元ものままですから

$$y'' = y$$

もみたします。これは $a = -1$ のときの微分方程式 (1.6) ですね。そこで一般の $a < 0$ についても指数関数を利用して解が作れるのではないか，と思います。実際に，合成関数の微分法を使うと，b を定数とするとき

$$(e^{bx})' = be^{bx}$$

となり，もう 1 回微分すると

$$(e^{bx})'' = (be^{bx})' = b^2 e^{bx}$$

となります。これから関数 e^{bx} が微分方程式

$$y'' - b^2 y = 0$$

の解であることがわかりました。つまり $a < 0$ のときは，$b = \sqrt{-a}$ とすると，e^{bx} が (1.6) の解になります。平方根を取るとき負の数にしても上の議論は成り立つので，e^{-bx} もやはり解になります。まとめますと，$a < 0$ のときには

$$e^{\sqrt{-a}x},\ e^{-\sqrt{-a}x}$$

という 2 つの関数が解になります。この場合も解は 2 つだけでなく実は無限個あるのですが，ここではこれ以上立ち入らないことにしましょう。

最後に $a > 0$ の場合を考えます。これも知っている関数で解になりそうなものを探してみます。三角関数 $\sin x, \cos x$ は

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$$

をみたしますから，

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x,\ (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$$

となって，$\sin x, \cos x$ 両方ともが $a = 1$ とした微分方程式 (1.6)

$$y'' + y = 0$$

の解であることがわかります。一般の $a > 0$ については，指数関数のときと同様のやり方で解が作れます。すなわち

$$\sin\sqrt{a}x,\ \cos\sqrt{a}x$$

が $a > 0$ のときの微分方程式 (1.6) の解になります。

問 2　これを示せ。

2　微分方程式を解いてみよう

微分方程式を解く技法は何百年も前からいろいろと開発されてきました。そういった技法の集大成を**求積法**といいますが，求積法であらゆる微分方程式が解けるわけではありません。実はほとんどの微分方程式は求積法では解けません。しかしそれでも微分方程式がするすると解けていくのを見るのは楽しいし，自分でいろいろ工夫して解いてみるのはよい勉強になりますから，この節ではいくつかの技法を紹介し，実際に微分方程式を解いてみましょう。

この節で使われる技法の元になる公式をまず用意します。関数 $f(x)$ と $y(x)$ の合成関数 $f(y(x))$ については，既に前節でも使いましたが合成関数の微分法の公式が成り立ちます：

$$(f(y(x)))' = f'(y(x)) \cdot y'(x) \tag{2.1}$$

この公式は，普段は，左辺の合成関数を微分するときには右辺を計算すればよい，という形で使われますが，微分方程式を解くときには，右辺が与えられたときにはそれを左辺と思える，という形で使います。

例 1　$y' = xy$

解答　この微分方程式を

$$\frac{y'}{y} = x$$

と書き換えます。関数 $f(x) = \log x$ については

$$f'(x) = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

が成り立つことを思い出し，公式 (2.1) を右から左に読むことを意識すると，

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{y} \cdot y' = f'(y) \cdot y' = (\log y)'$$

と読めます。つまり書き換えた微分方程式は，

$$(\log y)' = x$$

となり，(1.4) の形の微分方程式になりました。従ってこれは不定積分で解けて，

$$\log y = \frac{x^2}{2} + C$$

が得られます。ほしかったのは y ですから，この両辺を e の肩に乗せて，

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}+C}$$

という解が得られました。C は任意定数でしたが，指数関数の加法公式より

$$e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^{\frac{x^2}{2}}e^C$$

が成り立ち，e^C をあらためて c とおけば

$$y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}}$$

という解の表示が得られます。

なお今の解答では y は暗黙のうちに正の値を取ることにして議論していましたが，負の値を取るときにも解は作れます。しかしここでは詳細には立ち入りません。□

例 2 $y' = y + x$

解答 まず，右辺の x を取り除いた

$$y' = y$$

という微分方程式を考えます。なぜそうするか，ということは追求せず，これでうまくいけばラッキーと考えることにします。この微分方程式の解の 1 つが e^x であることはすでに見ましたが，その定数倍 ce^x も解になります。これは簡単に確かめられますし，あるいは上の例 1 で右辺の x が 1 で置き換わった場合と考えて例 1 と同様の議論をしても得られます。

さてここで，定数であった c を，関数 $c(x)$ に置き換えます。c が定数のままだと y は右辺の x を取り除いた微分方程式 $y' = y$ の解にしかならないけれど，関数 $c(x)$ にがんばってもらうと，例 2 の微分方程式 $y' = y + x$ の解になってくれるのではないか，というのがこの技法の発想です。

あらためて，

$$y(x) = c(x)e^x$$

とおき，微分を計算しましょう。

$$y'(x) = c'(x)e^x + c(x)e^x = c'(x)e^x + y(x)$$

となるので，

$$c'(x)e^x = x$$

であればこの $y(x)$ が求める微分方程式の解になります。これを書き換えると

$$c'(x) = xe^{-x}$$

となりますから，この $c(x)$ は不定積分で求められますね。部分積分を使って

$$\begin{aligned} c(x) &= \int xe^{-x}\,ds \\ &= \int x(-e^{-x})'\,dx \\ &= -xe^{-x} + \int (x)'e^{-x}\,dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

これを y に戻して，求める解は

$$y(x) = (-xe^{-x} - e^{-x} + C)e^x = -(x+1) + Ce^x$$

となります。これが解になることは簡単に確かめられます。□

例 3 $2y' = y + xy^3$

解答　この微分方程式は，例 1，例 2 の 2 つの技法とさらにもう 1 つ新しい技法を組み合わせて解くことができます。新しい技法とは，

$$z = \frac{1}{y^2}$$

とおいて，求める関数を z に取り替えることです。微分方程式の両辺を y^3 で割ると，

$$\frac{2y'}{y^3} = \frac{1}{y^2} + x$$

となります。ここで左辺に注目します。例 1 の技法，すなわち合成関数の微分法の公式を右から左に読む，ということをすると，この左辺が

$$\frac{2y'}{y^3} = \left(-\frac{1}{y^2}\right)' = -z'$$

と書けることがわかります。従って書き換えた微分方程式は，z を用いて

$$-z' = z + x$$

と書け，したがって

$$z' = -z - x$$

と書けることになりました。

次に例 2 に倣って，右辺の $-x$ を取り除いた微分方程式

$$z' = -z$$

を考えます。これはまた例 1 と同じ形の微分方程式になりましたから，解けて，解として

$$z(x) = ce^{-x}$$

が得られます（自分で解いてみて下さい）。ここで例 2 のやり方の通り，定数であった c を関数 $c(x)$ としてみます。

$$z(x) = c(x)e^{-x}$$

これを微分すると

$$z'(x) = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} = c'(x)e^{-x} - z(x)$$

となるので，

$$c'(x)e^{-x} = -x$$

であればよいことがわかります。この先は例 2 とほぼ同様ですから，途中の計算は省略すると，

$$c(x) = -xe^x + e^x + C$$

が得られ，z に戻して

$$z(x) = -x + 1 + Ce^{-x}$$

が得られます。さてほしかったのは y でしたから，y と z の関係を思い出すと，

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Ce^{-x} - x + 1}}$$

こうして解が求められました。□

例 1 は変数分離形と呼ばれる微分方程式の 1 つで，変数分離形の微分方程式の解法に則って解きました。例 2 は非斉次線形微分方程式というカテゴリーの微分方程式で，その解法である定数変化法により解きました。例 3 は Bernoulli（ベルヌーイ）の微分方程式と呼ばれるものの 1 つで，その解法に則って解きました。どのようなカテゴリーがあってそのカテゴリー毎にどのような解法が考えられているか，ということに興味を持たれるかもしれませんので，このノートの最後に参考文献を挙げておきます。福原先生の「微分方程式 上」と，東大出版会の「微分方程式」に，かなり多くの技法が載っています。ただしこれから微分方程式を勉強していこうというときに，これらの特殊技法に深入りするのはあまり賢明ではないかもしれません。というわけで，このノートではこの話はこれくらいにしておきましょう。

3 微分方程式に関する用語

微分方程式とは，求めたい関数 $y(x)$ とその微分の間の関係式を指すのでした。この求めたい関数を，**未知関数**といいます。これは 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

において求めたい数 x を未知数というのと同じことばの使い方です。

y を未知関数とする微分方程式は，一般的に書くと

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

という風に表されます。たとえば

$$y' = y + x$$

であれば

$$F(x, y, y') = y' - y - x$$

とすればよい。F に現れる一番高い微分階数を，その微分方程式の**階数**と言います。たとえば

$$3y'' + ayy' + xy^3 + b \sin y = 0$$

というような微分方程式であれば，y'' が最高階微分なので，階数は 2 です。あるいは 2 階微分方程式，という言い方もします。

微分方程式の解は一般に無限個ありました。どれくらいあるかというと，微分方程式の階数が n のときには，n 個の任意定数が解に含まれます。このように階数と同じ個数の任意定数を含む解を，**一般解**といいます。第 2 節の例でいえば，例 3 の微分方程式

$$2y' = y + xy^3$$

の階数は 1 で，解として得られた

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Ce^{-x} - x + 1}}$$

は 1 個の任意定数 C を含んでいるので，これは一般解です。また第 1 節の最後の方で考えた微分方程式

$$y'' = 0$$

の解として

$$y(x) = Cx + D$$

が得られましたが，微分方程式の階数は 2 でこの解は任意定数を 2 個（C と D）含むので，これも一般解です。

さて，たくさんある解のうちの 1 個を特定する方法はいろいろありますが，よく使われるのは初期条件です。n 階の微分方程式 (3.1) を考えます。a を 1 つ決めます。また別に $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ という n 個の値も決めます。このとき微分方程式 (3.1) の解 $y(x)$ に対して，

$$y(a) = b_0,\ y'(a) = b_1,\ y''(a) = b_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \tag{3.2}$$

という条件を課します。この条件 (3.2) を**初期条件**と呼びます。初期条件という言い方ですが，微分方程式は物理現象の解明において現れたもので，そのときの変数 x はふつう時刻を表していたため，$x = a$ という時刻における条件を初期時刻 a における条件と見なしているわけです。

階数が n の微分方程式の一般解は n 個の任意定数を含みますが，初期条件 (3.2) は n 本の方程式なので，未知数と方程式の数が一致して任意定数が決められ，解が 1 つに定まることが期待されます。

例 1　微分方程式

$$2y' = y + xy^3$$

の解で，初期条件

$$y(0) = 3$$

をみたすものを求めよ。

解答　一般解が

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Ce^{-x} - x + 1}}$$

で与えられていた。両辺に $x = 0$ を代入して

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{C + 1}}$$

となるので，初期条件は

$$\frac{1}{\sqrt{C + 1}} = 3$$

となる。この方程式を解いて，

$$C = -\frac{8}{9}$$

これを一般解に代入することで，求める解

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{8}{9}e^{-x} - x + 1}}$$

が得られた。□

例 2 微分方程式 $y'' = 0$ の解で，初期条件

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

をみたすものを求めよ。

解答 一般解が $y(x) = Cx + D$ で与えられていた。これより

$$y'(x) = C$$

となる。すると

$$y(0) = D,\ y'(0) = C$$

だから，初期条件より

$$D = 1,\ C = 2$$

を得る。よって求める解は

$$y(x) = 2x + 1$$

である。□

4 運動と微分方程式

微分方程式は内容的には数学ですが，その由来は物理学にあります。17 世紀，ニュートンは，万物の運動はたった 1 つの微分方程式で表されることを発見しました。それをニュートンの**運動方程式**といいます。それはものすごく簡潔な方程式で，

$$(\text{質量}) \times (\text{加速度}) = (\text{外力}) \tag{4.1}$$

というものです。微分方程式に見えないかもしれませんが，よく見るとこれは微分方程式です。今調べたい対象（ボール，石，星，何でもよい）があったとします。まあたとえば石としましょうか。左辺の質量はこの石の質量です。石は外力を受けて動きます。動くので，その位置は時刻とともに変化しますね。そこで位置を y で表せば，y は x につれて変化するので，x を変数とする関数 $y(x)$ になります。この関数 $y(x)$ を求めれば，石の運動が完全にわかります。

さて関数 $y(x)$ を微分すると，位置の変化の割合，つまり速度が得られます。それをもう 1 回微分すると，速度の変化の割合，つまり加速度が得られます。つまり運動方程式 (4.1) の左辺にある (加速度) というのは，$y(x)$ という関数の 2 階微分 $y''(x)$ ということになります。したがって (4.1) は，y を未知関数とする微分方程式なのです。また外力は，対象（石）がどこにあるか，どれくらいの速度で動いているかによって変わるかもしれないので，一般に外力自体が y あるいは y' に依る関数となります。

外力が何か，というのはそれぞれの運動毎に設定されます。たとえば惑星が太陽のまわりを回るという運動の場合には，外力は惑星と太陽の間に働く万有引力です。手を離すとボールが下に落下するという運動（自由落下）では，やはボールと地球の間に働く万有引力が外力です。バネに結ばれたおもりが振動を繰り返すという運動では，バネの張力が外力です。それぞれの

運動毎に状況が異なり，実際に書き下した運動方程式の形は様々ですが，そのどれもが (4.1) という 1 本の方程式から導かれる，というところがニュートンの発見の素晴らしいところです。つまり運動を調べるという物理学において，ニュートンの運動方程式 (4.1) は最高度の**普遍性**を持つのです。

ここで普遍性について考えましょう。普遍性があるとは，いついかなる場合でも成り立つということです。たとえば食卓における作法というのには，それほど普遍性はありません。地域や国が違えば，作法も違うからです。一方数学は最高度に普遍的です。日本で証明された定理であろうと，他の国で証明された定理であろうと，その定理は世界中どこででも正しいし，もし他の惑星に知性を持った生命体がいたとしても，彼らにとっても正しいのです。物理学という学問は，強く普遍性を追求する学問です。どんな場合でも通用するような法則を求めることが，物理学の営みです。その観点からすると，ニュートンの運動方程式 (4.1) は，物理学における最高級の成果と考えられます。そしてそれが微分方程式の形で与えられているのですから，運動法則を学ぶ場合に微分方程式を避けて通るのはいかにも不自然です。

不幸なことに，現在（2019 年）の時点では，高校数学に微分方程式はなく，高校物理に運動方程式（を用いた解析）はありません。そこで，科学を学びたいという志を持った高校生の皆さんには早いうちから微分方程式に親しんでもらいたいと考え，この原稿を書いています。微分方程式を使うといかに物事がすっきりと処理できるか，普遍性の威力，そういったことを感じていただきたいと思います。

4.1 落下運動

質量 m の玉を垂直上方に投げ上げ，それが上がって落ちるという現象を調べましょう。垂直方向に y 軸を取り，地面 = 投げ上げる高さの y 座標を 0 とします。投げ上げるときの速度を v_0 とおきましょう。以上でこの運動が完全に決定され，我々はあらゆることを知ることができます。

時刻を表す変数を x とおき，投げ上げるときの時刻 x を 0 とします。この運動に働く外力は重力（玉と地球の間に働く万有引力）で，垂直下方（y 軸の負の方向）に働き，$-mg$ と表されます。ここで g は重力加速度と呼ばれる定数です。するとニュートンの運動方程式 (4.1) に当てはめて，この場合の運動方程式

$$my'' = -mg \tag{4.2}$$

が得られます。また初期条件は

$$y(0) = 0,\ y'(0) = v_0 \tag{4.3}$$

となりますね。(4.2) より

$$y'' = -g$$

が得られますが，これでこの運動は玉の質量には依存しないことも証明できました。この微分方程式の左辺を $(y')'$ と見ると，これは y' を未知関数とする (1.4) のタイプの微分方程式ですので，不定積分で解けて

$$y'(x) = -gx + a \quad (a \text{ は定数})$$

が得られます。そしてこれはまた (1.4) のタイプの微分方程式になりましたので，不定積分することで

$$y(x) = -\frac{g}{2}x^2 + ax + b \quad (b \text{ は定数})$$

が得られます。この解に現れる任意定数 a, b は，初期条件 (4.3) により決められます。まず $y(0) = 0$ を使うと

$$b = 0$$

が得られます。次に

$$y'(x) = -gx + a$$

でしたから，$y'(0) = v_0$ を使うと

$$a = v_0$$

が得られます。こうしてこの運動を表す関数 $y(x)$ が完全に決定されました：

$$y(x) = -\frac{g}{2}x^2 + v_0 x \tag{4.4}$$

この解 (4.4) があれば，あらゆることがわかります。

問　玉が地面に落ちてくるのは何秒後か？
答　$y(x) = 0$ となる x を求めればよい。

$$y(x) = x\left(-\frac{g}{2}x + v_0\right)$$

と因数分解できるので，方程式 $y(x) = 0$ より

$$x = 0,\ x = \frac{2v_0}{g}$$

が得られる。このうち $x = 0$ は投げはじめであったから，地面に落ちてくる時刻は

$$x = \frac{2v_0}{g}$$

である。□

問　玉はどの高さまで上がるか？
答　一番高いところでは上昇から落下に切り替わるので，そのときの速度は 0 になる。(4.4) より

$$y'(x) = -gx + v_0$$

を得るので，方程式 $y'(x) = 0$ を解いて

$$x = \frac{v_0}{g}$$

が得られ，これが最高点に到達するときの時刻である。この時刻における y の値が最高点の高さとなるので，答は

$$y\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

となる。□

問　地面に落ちてきたときの速度は？
答　$y'(x)$ に，上で求めた落ちてくる時刻を代入すればよくて，答は

$$y'\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -g \cdot \frac{2v_0}{g} + v_0 = -v_0$$

となる。つまり投げはじめと同じ速度で，向きが逆になる。□

4.2　バネによる振動

水平な面の上に一端が固定されたバネがあって，もう 1 つの端におもりがついているとします。おもりの質量を m とおきましょう。おもりを引っ張るとバネの張力によって振動が起こります。この振動もニュートンの運動方程式を使って調べることができます。

バネの置かれた方向に y 軸を取り，バネが伸びても縮んでもいないときの y 座標を 0 とし，伸びる方向を y 軸の正の方向とします。おもりを y_0 だけ引っ張ってから放すことにします。この運動の外力はバネの張力で，それは伸びが y のときに $-ky$ で与えられます。ここで k はバネによって決まる定数で，バネ定数と呼ばれます。

以上でニュートンの運動方程式 (4.1) を書き下すことができるようになりました。

$$my'' = -ky \tag{4.5}$$

初期条件は

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = 0 \tag{4.6}$$

で，$y'(0) = 0$ というのは静かに放すということによります。

微分方程式 (4.5) を解きましょう。これは第 1 節の最後で扱った微分方程式 (1.6) で，$a = \dfrac{k}{m}$ とした場合になりますね。$a > 0$ の場合なので，sin と cos で表される解があることを見ていました。つまり我々は，

$$\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,x,\ \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,x$$

という 2 つの解があることを知っています。

ここで微分方程式 (1.6) に関する重要な性質を述べます。微分方程式 (1.6) は，y'' と y について 1 次式になっています。そのようなものを線形微分方程式というのですが，線形微分方程式に共通の著しい性質として，

$$\begin{cases} y_1, y_2 \text{ が解であれば } y_1 + y_2 \text{ も解になる} \\ y \text{ が解で } c \text{ が定数なら } cy \text{ も解になる} \end{cases}$$

が成り立ちます。

問 3　これを微分方程式 (1.6) に対して示せ。

この性質を組み合わせて使うと，微分方程式 (4.5) の解として，既に手に入れた 2 つの解を用いた

$$y(x) = a\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,x + b\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,x \quad (a, b \text{ は定数})$$

が得られます。微分方程式 (4.5) の階数は 2 で，この解には任意定数が 2 個含まれるので，これは一般解です。

さてそれでは初期条件 (4.6) を使ってこの任意定数を決めましょう。$y(0) = y_0$ より

$$a \sin 0 + b \cos 0 = y_0 \;\; \Rightarrow \;\; b = y_0$$

がわかります。次に一般解 $y(x)$ を微分して

$$y'(x) = a\sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, x - b\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, x$$

となるので，$y'(0) = 0$ より

$$a\sqrt{\frac{k}{m}} \cos 0 - b\sqrt{\frac{k}{m}} \sin 0 = 0 \;\; \Rightarrow a = 0$$

が得られます。こうして解

$$y(x) = y_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, x \tag{4.7}$$

が決まり，おもりの運動はこの $y(x)$ によって完全に記述されることになりました。

問　これは定性的に言ってどのような運動か？
答　$\cos\theta$ は -1 と 1 の間を振動する関数なので，おもりは $-y_0$ と y_0 の間を振動する。□

問　その振動の周期は？
答　$\cos\theta$ の周期は 2π だから，おもりが 1 回振動して元の位置 y_0 に戻るまでにかかる時間 x は方程式

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, x = 2\pi$$

を解いて得られる。すなわち

$$x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

が周期である。□

問　おもりが $y = 0$ の位置をはじめに通過するときの速度は？
答　まず，はじめに $y = 0$ を通るときの時刻を求めましょう。それは $y(x) = 0$ となる x を求める問題なので，(4.7) より

$$y_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, x = 0$$

を解けばよいことになります。$\cos\theta$ が 0 になる最小の正の数は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ です。したがって求める x は

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, x = \frac{\pi}{2}$$

で決まります。すなわち

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\pi}{2}$$

がその時刻になります。

次に (4.7) で与えられた解の関数 $y(x)$ を微分して，

$$y'(x) = -y_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,x$$

となります。これで問題の時刻における通過速度が，

$$y'\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\pi}{2}\right) = -y_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\pi}{2} = -y_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi}{2} = -y_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

であることがわかりました。□

4.3　惑星の公転

最後に，少し大変ですが，惑星が太陽のまわりを回る公転を調べましょう。惑星 P の質量を m，太陽 S の質量を M とします。この間に働く力は万有引力で，その値は，P と S の距離を r とするとき

$$G\frac{Mm}{r^2}$$

で与えられます。ここで G は万有引力定数と呼ばれる定数です。公転は 2 次元的な（平面を動く）運動なので，太陽 S を原点とする xy 座標を設定し，惑星 P はその xy 平面上を動くということにします。時刻を表す変数は t を使うことにします。t が（今までの x に代わり）独立変数です。

惑星 P の位置は平面の座標 (x, y) で表されるので，この座標が時刻とともに変化する，ということで P の運動が記述されます。従って P の運動は，2 つの関数 $x(t), y(t)$ により，座標が $(x(t), y(t))$ であるという形で表されます。この 2 つの関数 $x(t), y(t)$ を求めることが我々の問題です。

ニュートンの運動方程式 (4.1) を書くために，もう少し準備が必要です。まず P と S の距離を r と置きましたが，$(x(t), y(t))$ との関係は

$$r = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \tag{4.8}$$

で与えられます。つまり r も t を変数とする関数です。次に S から P に働く万有引力は，P から S に向かうベクトルで表され，その長さが上で述べた $G\dfrac{Mm}{r^2}$ になります。従ってその x および y 方向の成分はそれぞれ

$$-G\frac{Mm}{r^2}\times\frac{x}{r},\ -G\frac{Mm}{r^2}\times\frac{y}{r}$$

で与えられることになりますね。

これで材料が揃いましたので，ニュートンの運動方程式を書きましょう。加速度はベクトルとして $(x''(t), y''(t))$ となります。

$$\begin{cases} mx'' = -G\dfrac{Mmx}{r^3} \\ my'' = -G\dfrac{Mmy}{r^3} \end{cases} \tag{4.9}$$

(4.8) のように r の中にも $x(t), y(t)$ が入っているわけですから，微分方程式 (4.9) はかなり複雑な微分方程式になります。つまり 2 本の式はそれぞれ独立に解けばよいのではなくて，絡み合っているものとして解かなければなりません。

この微分方程式を解くのには，極座標が有効です。極座標は，すでに登場している r と，点 (x, y) と原点を結ぶ線分が x 軸となす角度 θ を用いて，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と表す方法です。x, y が時刻 t とともに値を変える関数なので，r, θ も t の関数となります。そこで (4.9) の未知関数 x, y を，新しい未知関数 r, θ に変えることを考えます。(x, y) と (r, θ) の関係より，

$$x' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta,\ y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \tag{4.10}$$

が得られ，されにこの両辺を微分して，

$$\begin{aligned} x'' &= r''\cos\theta - 2r'\theta'\sin\theta - r\theta''\sin\theta - r(\theta')^2\cos\theta \\ y'' &= r''\sin\theta + 2r'\theta'\cos\theta + r\theta''\cos\theta - r(\theta')^2\sin\theta \end{aligned}$$

が得られます。(4.9) の両辺にある m を消去し，$GM = k$ とおくと

$$x'' = -k\frac{x}{r^3},\ y'' = -k\frac{y}{r^3} \tag{4.11}$$

となりますので，この 2 式に現れる x, y, x'', y'' を r, θ で表すと，極座標による微分方程式が得られます。そうしておいて，1 本目の式に $\sin\theta$ を掛け，2 本目の式に $\cos\theta$ を掛けて差し引きしましょう。すると

$$-2r'\theta' - r\theta'' = 0$$

が得られます。この左辺に $-r$ を掛けると

$$2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0$$

となりますが，これは

$$(r^2\theta')' = 0$$

という式に他ならないので，$r^2\theta'$ を未知関数とする微分方程式として解いて

$$r^2\theta' = c \quad (c \text{ は定数})$$

が得られます。ここで再び (4.11) を見てみます。1 本目の式の右辺は

$$-k\frac{x}{r^3} = -k\frac{r\cos\theta}{r^3} = -k\frac{\cos\theta}{r^2}$$

ですが，今求めた $r^2\theta' = c$ を代入するとこれは

$$-k\frac{\theta'\cos\theta}{c}$$

と書けます。2 本目の右辺も同様です。ここで今までよくやってきたように，合成関数の微分法の公式を逆方向に読むことで

$$\theta' \cos\theta = (\sin\theta)',\ \theta' \sin\theta = (-\cos\theta)'$$

と書けることに注意します。そうすると，(4.11) はあらためて次のように書けます。

$$x'' = \left(-\frac{k}{c}\sin\theta\right)',\ y'' = \left(\frac{k}{c}\cos\theta\right)'$$

これらの両辺を不定積分して，

$$x' = -\frac{k}{c}\sin\theta + c_1,\ y' = \frac{k}{c}\cos\theta + c_2 \quad (c_1, c_2\text{は定数})$$

が得られます。これらの左辺は先に (4.10) で計算していました。その結果を代入したと考え，1 本目に $\sin\theta$，2 本目に $\cos\theta$ を掛けて，2 本目から 1 本目を差し引くと，

$$r\theta' = \frac{k}{c} - c_1\sin\theta + c_2\cos\theta$$

が得られます。これで最後ですが，先に求めた $r^2\theta' = c$ を使ってこの式から θ' を消去しましょう。その結果,

$$\frac{c}{r} = \frac{k}{c} - c_1\sin\theta + c_2\cos\theta$$

となります。ところでこの右辺に現れる 2 つの三角関数は，次のようにまとめることができますね。

$$-c_1\sin\theta + c_2\cos\theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\theta + \phi)$$

ここで ϕ は c_1, c_2 から決まる定数です。これも盛り込んで結果を整理すると，

$$r = \frac{c}{\frac{k}{c} + \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\theta + \phi)}$$

となります。いろいろな定数が出てきたので，次のようにおいて整理することにしましょう。

$$\mathrm{e} = \frac{c\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{k},\ \ell = \frac{c^2}{k}$$

この新しい定数を使うと，我々の得た結果は

$$r = \frac{\ell}{1 + \mathrm{e}\cos(\theta + \phi)} \tag{4.12}$$

と書けます。

未知関数 $r(t), \theta(t)$ がこれこれと求まったわけではありませんが，$r(t)$ と $\theta(t)$ がみたすべき関係式が手に入りました。つまり惑星 P は，その極座標 (r, θ) が関係式 (4.12) をみたすように運動することがわかったわけです。それでは関係式 (4.12) は何を表しているでしょうか。実はこれは原点を 1 つの焦点とする楕円を表します。その証明は問にします。

問 4 (4.12) で表される曲線は，$|\mathrm{e}| < 1$ のときは原点を 1 つの焦点とする楕円であることを示せ。

こうして我々は，次の結論を得ました。

惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描いて運行する

これはケプラーが発見した惑星に関する 3 つの法則のうちの 1 番目（ケプラーの第一法則）で，近代科学の扉を開いた画期的な発見でした。ケプラーは，地球から見た惑星の方角を記録した膨大なデータを調べ，楕円軌道を発見しました。それは素晴らしい研究でしたが，その素晴らしい結果も，ニュートンの運動方程式から数学の議論によって導かれてしまうのです。

最後に 1 つコメントです。問 4 にあるように $|\mathrm{e}| < 1$ なら惑星の軌道は楕円ですが，$|\mathrm{e}| \geqq 1$ のときはどうなるでしょうか。このときは $\cos(\theta + \phi)$ が -1 から 1 までのすべての値を取るとすると，分母が 0 になることが起きます。分母が 0 ということは $r = \infty$ ということで，つまりその惑星は太陽から無限の彼方に去っていくのです。つまりこのとき (4.12) は，惑星ではなくて，太陽のまわりを公転しないで無限の彼方からやってきて無限の彼方へ去っていく星（？）の運動を表しているのです。

参考文献

[1] 福原満洲雄「微分方程式 上」朝倉書店, 1951.

[2] 東京大学応用物理学教室編「微分方程式」東京大学出版会, 1960.

[3] 原岡喜重「微分方程式 増補版」数学書房, 2016.

[4] 原岡喜重「オイラーの公式がわかる」講談社ブルーバックス, 2013.

[1], [2] は，第 2 節で紹介した求積法についてわりと詳しく書いてある本として挙げました。微分方程式を勉強するときの教科書としてももちろん優れた本ですが，初めて学ぶ方は [3] がわかりやすいのではないかと思います。[3] では第 4 節で述べたような物理現象を微分方程式で解明する，という話も扱っています。バイオリンやギターなどの弦楽器は音程があるのに，なぜ太鼓には音程がないか，ということが，ニュートンの運動方程式から説明されます。[4] にも微分方程式を使って物理現象を解明する話が書いてあります。ニュートン力学だけでなく，電磁気学でも法則が微分方程式で与えられ，それを解くことで電磁波の現象が解明されます。

2019 年 10 月 25 日　原岡喜重