数学問題高校編（その２）

問題および解説・解答

古島幹雄 *

2021 年 1 月 21 日

目 次

*熊本大学名誉教授 (E-mail： wagami@kumamoto-u.ac.jp)

1　ベクトル・複素数平面の図形・空間図形の問題

問題 1.1. 1辺の長さが1である正四面体 OABC において，OA の中点を P, OB を $x:(1-x)$ $(0<x<1)$ に内分する点を Q, さらに OC を $(1-x):x$ に内分する点を R とする．この時，三角形 PQR の面積 $S(x)$ を求め，$S(x)$ の最小値を求めよ．

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left\{x^2+(1-x)^2\right\}$$

問題 1.2. $\triangle$OAB の辺 $\overline{\mathrm{OA}}$ を $s:(1-s)$ $(1<s<1)$ に内分する点を P, 辺 OB を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を Q とする．さらに，線分 AQ と線分 BP の交点を R とし，線分 OR の延長と辺 AB の交点を S とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および s,t をを用いて表せ．さらに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交するとき，S は辺 AB の中点であることを示せ．

問題 1.3. $|a|=|b|=|c|$ を満たす全ての複素数 $a,b,c,$ 及び複素数 d に対し

$$W=(a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b})+i(|c|^2-|d^2)\mathrm{Im}\,(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b})$$

は実数であることを示せ．

問題 1.4. 二つの0でない複素数 z,w は $\mathrm{Re}\,(z\overline{w})=0$ のとき直交するという．今，$z\neq 0$ および $\alpha z\neq 0$ は α が純虚数のとき直交することを示せ．

問題 1.5. 複素平面上の3点 $\alpha=a<0,\ \beta=b>0,\ \gamma=ic\ (c>0)$ を頂点とする三角形の3垂線の交点を求めよ．このことを利用して複素平面ないの三角形に対する3垂線の定理の証明をせよ．

問題 1.6. $a\neq b,u$ を複素数とする．u から a,b を通る直線 L に下ろした垂線の足を v とする．このとき，

$$v=\frac{1}{2}\left[a+u+(\overline{u}-\overline{a})\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\right]$$

特に，$|a|=|b|$ のときは

$$v=\frac{1}{2}\left(a+b+u-\overline{u}\frac{ab}{|a|^2}\right)$$

であることを示せ．

問題 1.7. $y = \sqrt[3]{x}$ と $y = x^2$ の原点以外の交点を P とし，点 P における $y = x^2$ の接線と y-軸との交点を Q．さらに，点 Q から点 P における $y = \sqrt[3]{x}$ の接線に下した垂線の足を R とする．

(1) $\angle \mathrm{QPR} = \theta$ とおく．このとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2) R の座標を求めよ．

(3) $\triangle \mathrm{PQR}$ の外接円の中心 C の座標を求めよ．

2　数と式の問題

問題 2.1. 次の連立方程式

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 4 \\ (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1 \end{cases}$$

の解を求めよ．

3　整数の問題

問題 3.1. p を素数とする．そのとき，$p^x + 1 = y^2$ を満たす自然数（正の整数）x, y を求めよ．また，そのときの p も求めよ．

問題 3.2. a, b を自然数とする．そのとき，$x^2 - (ab)x + (a+b) = 0$ の自然数解が存在するように a, b を定め，そのときの解 x も求めよ．

4　微積分の問題

問題 4.1. $x^5 - x^4 - 1 = 0$ は $1 < x < 2$ の範囲に唯一つの実数解 α を持つことを示せ．さらに，放物線 $y = \alpha x - x^2$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S は $\dfrac{1}{3} < S < \dfrac{1}{2}$ を満たすことを示せ．

問題 4.2. (1) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 - 6x + 9}$ の極大値及び極小値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{2x^2-6x+9}\,dx = \frac{3}{2}$ を示せ.

注意 4.1. 一般に, $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,dx = \frac{b-a}{2}$ である（各自証明を試みよ).

このことから,

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$

(2) $\displaystyle\int_a^b \frac{x^n}{(a+b-x)^n+x^n}\,dx = \frac{b-a}{2}$

問題 4.3. 放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ が接するおき, $r>0$ の値をもとめよ.

問題 4.4. (1) $2\sqrt[3]{2x+1}+1=x^3$ の解を求めよ.

(2) $y=\sqrt[3]{2x+1}$ と $y=\dfrac{x^3-1}{2}$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

5 解答および解説

$\boxed{\text{問題 1.1}}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-x)\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \frac{x(1-x)}{2} \\
\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4} = x^2-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \\
\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2 &= (1-x)^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = (1-x)^2+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

面積を $S(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
4S^2(x) &= \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2 \\
&= x^2(1-x)^2 + 3\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{x^2(1-x)^2}{4} \\
&= \frac{3}{4}x^2(1-x)^2 + \frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}^2 + \frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}^2 \\
&= \frac{3}{16}\left\{x^2+(1-x)^2\right\}^2
\end{aligned}$$

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left\{x^2+(1-x)^2\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}$$

$\boxed{\text{問題 } 1.2}$

$\mathrm{BR}:\mathrm{RP} = x : 1-x,\ \mathrm{AR}:\mathrm{RQ} = y : 1-y,\ \mathrm{AS}:\mathrm{SB} = z : 1-z$

但し、$0 < x, y, z < 1$ とおく.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= x\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{OB}} = xs\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= (1-y)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-y)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + yt\overrightarrow{\mathrm{OB}}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行でない（一次独立）なので

$$\begin{cases} xs = 1-y \\ 1-x = yt \end{cases} \qquad \therefore \quad x = \frac{1-t}{1-st},\ \ y = \frac{1-s}{1-st}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{s(1-t)}{1-st}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t(1-s)}{1-st}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}}\ (k > 1)$ とおくと,

$$\begin{cases} k\dfrac{s(1-t)}{1-st} = 1-z \\ k\dfrac{t(1-s)}{1-st} = z \end{cases} \qquad \therefore \quad k = \frac{1-st}{s(1-t)+t(1-s)}, \quad z = \frac{t(1-s)}{s(1-t)+t(1-s)}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{s(1-t)}{s(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t(1-s)}{s(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

さらに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$（$\triangle$OAB は 2 等辺三角形）かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{s(1-t)}{s(1-t)+t(1-s)}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \frac{t(1-s)}{s(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ = \quad & \frac{t(1-s)}{s(1-t)+t(1-s)}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + \frac{s(1-t)}{s(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{aligned}$$

$\angle\mathrm{AOB} = \theta \ (0 < \theta < \pi)$ とおくと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \cdot \cos\theta$$

こうして，

$$(s-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2(\cos\theta - 1) = 0$$

$\cos\theta \neq 0$ ゆえ，$s = t \quad z = \dfrac{1}{2}$. 即ち，S は辺 AB の中点である．

$\boxed{\text{問題 } 1.3}$

$$W = (a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b}) + i(|c|^2 - |d^2)\mathrm{Im}\,(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}))$$

とおき，

$$A = (a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b})$$

とおく．

$$W = A - i\mathrm{Im}\,A$$

を示せば, $\mathrm{Im}\,W = \mathrm{Im}\,A - \mathrm{Im}\,A = 0$. よって W は実数となる．$a| = |b| = |c|$

に留意して

$$
\begin{aligned}
A &= (a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b}) \\
&= \left\{|a|^2-(a\overline{d}+\overline{a}b-b\overline{d})\right\}\left\{|c|^2-(\overline{b}c+\overline{c}d-\overline{b}d)\right\} \\
&= \left\{|c|^2-(a\overline{d}+\overline{a}b-b\overline{d})\right\}\left\{|c|^2-(\overline{b}c+\overline{c}d-\overline{b}d)\right\} \\
&= |c|^4-|c|^2(a\overline{d}+\overline{a}b-b\overline{d}+\overline{b}c+\overline{c}d-\overline{b}d)+(a\overline{d}+\overline{a}b-b\overline{d})(\overline{b}c+\overline{c}d-\overline{b}d) \\
&= |c|^4-|c|^2(a\overline{d}+\overline{a}b-b\overline{d}+\overline{b}c+\overline{c}d-\overline{b}d) \\
&+ a\overline{b}c\overline{d}+a\overline{c}|d|^2-a\overline{b}|d|^2+\overline{a}c|b|^2+\overline{a}b\overline{c}d-\overline{a}d|b|^2-c\overline{d}|b|^2-b\overline{c}|d|^2+|b|^2|d|^2 \\
&= |c|^4-|c|^2(a\overline{d}+\overline{a}b-b\overline{d}+\overline{b}c+\overline{c}d-\overline{b}d)+a\overline{b}c\overline{d}+\overline{a}b\overline{c}d \\
&+ |d|^2(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c})+|c|^2(\overline{a}c-\overline{a}d-c\overline{d})+|c|^2|d|^2 \quad (\because |b|=|c|) \\
&= |c|^4-|c|^2(a\overline{d}+\overline{a}b-b\overline{d}+\overline{b}c+\overline{c}d-\overline{b}d-\overline{a}c+\overline{a}d+c\overline{d}) \\
&+ |d|^2(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c})+|c|^2|d|^2+a\overline{b}c\overline{d}+\overline{a}b\overline{c}d \\
&= |c|^4+|c|^2|d|^2-|c|^2\left\{2\mathrm{Re}\,(a\overline{d})-2\mathrm{Re}\,(b\overline{d})+2\mathrm{Re}\,(\overline{c}d)+\overline{a}b+\overline{b}c-\overline{a}c\right\} \\
&+ 2\mathrm{Re}\,(a\overline{b}c\overline{d})+|d|^2(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c}) \\
\therefore\ \mathrm{Im}\,A &= -|c|^2\mathrm{Im}\,(\overline{a}b+\overline{b}c-\overline{a}c)+|d|^2\mathrm{Im}\,(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c}) \\
&= |c|^2\mathrm{Im}\,(\overline{a}c-\overline{a}b-\overline{b}c)+|d|^2\mathrm{Im}\,(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c}) \\
&= -(|c|^2-|d|^2)\mathrm{Im}\,(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c}) \quad \because \mathrm{Im}\,(\overline{a}c-\overline{a}b-\overline{b}c)=-\mathrm{Im}\,(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c})
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Im}\,(a\overline{c}-a\overline{b}-b\overline{c})=\mathrm{Im}\,(a\overline{c})-\mathrm{Im}\,(a\overline{b})-\mathrm{Im}\,(b\overline{c})=-\mathrm{Im}\,(\overline{a}c)-\mathrm{Im}\,(a\overline{b})+\mathrm{Im}\,(\overline{b}c)=\mathrm{Im}\,(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b})$
$-\mathrm{Im}\,A=(|c|^2-|d|^2)\mathrm{Im}\,(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b})$ より $W=A-i\mathrm{Im}\,A$ を得る．

$$\therefore \quad \mathrm{Im}\,W=\mathrm{Im}\,A-\mathrm{Im}\,A=0 \quad \text{よって}\, W\, \text{は実数である．}$$

注意 5.1. 複素数 a,b,c,d を原点中心の円周上にある異なる４点とすると，
$|a|=|b|=|c|=|d|$ より，

$$
\begin{aligned}
W &= (a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b})+i(|c|^2-|d|^2)\mathrm{Im}\,(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b}) \\
&= (a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b}) \\
&= |a-d|^2|c-b|^2\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}
\end{aligned}
$$

は実数，即ち，$\mathrm{Im}\,W=0$ である．よって

$$\mathrm{Im}\,\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}=0$$

$\boxed{\text{問題 1.4}}$

α は純虚数より $\mathrm{Re}\,(\alpha) = 0$.

$$\mathrm{Re}\ (\alpha z \cdot \overline{z}) = \mathrm{Re}\ \left(\alpha |z|^2\right) = |z|^2 \mathrm{Re}\,(\alpha) = 0$$

よって αz と z は直交する.

$\boxed{\text{問題 1.5}}$

３垂線の交点 δ は虚数軸上にある. $\delta = ki\ (0 < k < c)$ とおく. ベクトル

$$\overrightarrow{\alpha\delta}, \overrightarrow{\beta\delta}, \overrightarrow{\alpha\gamma}, \overrightarrow{\beta\gamma}$$

に対応する複素数はそれぞれ

$$\delta - \alpha, \delta - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$$

. $\alpha = a, \beta = b, \gamma = ic$ より,

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\delta - \alpha)(\overline{\gamma - \beta}) = \mathrm{Re}\,(ki - a)(-ic - b) = kc + ab = 0 \\ \mathrm{Re}\,(\delta - \beta)(\overline{\gamma - \alpha}) = \mathrm{Re}\,(ki - b)(-ci - a) = kc + ab = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad k = -\frac{ab}{c} \quad \text{よって} \quad \delta = -i\frac{ab}{c}$$

注意 5.2. 一般に複素平面上の $\triangle\alpha\beta\gamma$ の垂心 δ は $\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\delta - \alpha)(\overline{\gamma - \beta}) = 0 \\ \mathrm{Re}\,(\delta - \beta)(\overline{\gamma - \alpha}) = 0 \end{cases}$ を解いて

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(\gamma - \alpha)\mathrm{Re}\,\alpha(\overline{\gamma} - \overline{\beta}) - (\gamma - \beta)\mathrm{Re}\,\beta(\overline{r} - \overline{\alpha})}{i\,\mathrm{Im}\,(\gamma - \alpha)(\overline{r} - \overline{\beta})} \\ &= i\,\frac{(\gamma - \alpha)\mathrm{Re}\,\alpha(\overline{\gamma} - \overline{\beta}) - (\gamma - \beta)\mathrm{Re}\,\beta(\overline{r} - \overline{\alpha})}{\mathrm{Im}\,(\alpha\overline{\gamma} + \overline{\beta}\gamma - \alpha\overline{\beta})} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 1.6}}$

複素平面内の a, b を通る直線の方程式 L は

$$L : z = a + (b - a)\,t \ \ (\text{但し}, t \text{ は実数})$$

で与えられる．u から L に下した垂線の足を v とおくと，v は u を通り直線 L に垂直な直線 L' と L との交点である．$b-a$ と $i(b-a)$ が直交することから，L' の方程式は

$$L':\ z = u + i(b-a)s \text{ (但し，} s \text{ は実数)}$$

と表されるので

$$a+(b-a)t = u+i(b-a)s \quad \therefore \quad (b-a)(t-si) = u-a \quad \therefore \quad t-si = \frac{u-a}{b-a}$$

両辺の共役をとって $t+si = \overline{t-si} = \overline{\frac{u-a}{b-a}}$.

$$2t = t-si+(t+si) = \frac{u-a}{b-a} + \overline{\frac{u-a}{b-a}} \quad \therefore \quad v = \frac{1}{2}\left[a+u+(\overline{u}-\overline{a})\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\right]$$

一方，$|a|=|b|$ ならば，$\dfrac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = -\dfrac{b}{\overline{a}}$ より

$$v = \frac{1}{2}\left(a+b+u-\overline{u}\frac{ab}{|a|^2}\right)$$

$\boxed{\text{問題 1.7}}$

$y=x^2$ と $y=\sqrt[3]{x}$ との交点 P の座標は $\mathrm{P}=(1,1)$. 点＄ P ＄での $y=x^2$ 及び $y=\sqrt[3]{x}$ の接線の方程式はそれぞれ

$$y = 2x-1, \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

(1) $\tan\alpha = 2,\ \tan\beta = \dfrac{1}{3}$ とおく．

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = 1$$

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) Q の座標は $\mathrm{Q}=(0,-1)$ である．Q から $y = \dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}$ に下した垂線の傾きは -3 でなので, 垂線の方程式は $y=-3(x-0)-1=-3x-1$. よって，R の座標は $\begin{cases} y = \dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3} \\ y = -3x-1 \end{cases}$ の解であるので，$\mathrm{R} = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

(3) $\triangle$PQR は $\angle$PRQ $=\dfrac{\pi}{2}$ なる直角 2 等辺三角形ゆえ，外接円の中心 C は線分 PQ の中点である．よって $\mathrm{C}=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

$\boxed{\text{問題 2.1}}$

$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$ から

$$\begin{aligned} x+\sqrt{x^2+1} &= \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y \\ y+\sqrt{y^2+1} &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}-x \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} x+y &= \sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1} \\ x+y &= \sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \end{aligned}$$

$\therefore 2(x+y)=0,\ x+y=0.$

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4$$

に $x=-y$ を代入して，

$$(x,y)=(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$$

$\boxed{\text{問題 3.1}}$

$0<p^x=y^2-1=(y-1)(y+1)\quad\therefore\quad\dfrac{p^x}{y+1}=y-1\neq 0.$

$p\geqq 2$ は素数ゆえ，$p=y+1=$ でなければ $p^a=y+1\ (a\geqq 2)$ ゆえ結果として，$p^a=y+1\ (a\geqq 1)$ なる自然数 a が存在する．そこで，$b=x-a\geqq 0$ とおけば，$p^b=y-1$. $y+1>y-1$ より $a>b$ を得る．今，

$$p^a-p^b=(y+1)-(y-1)=2\quad\therefore\quad p^b(p^{(a-b)}-1)=2$$

ゆえ，

$$p^b=2,\ p^{(a-b)}-1=1\quad\text{または}\quad p^b=1,\ p^{(a-b)}-1=2$$

すなわち，

$$p^b = 2,\ p^{(a-b)} = 2 \quad \text{または} \quad p^b = 1,\ p^{(a-b)} = 3$$

このことから，

$$p = 2, b = 1, a = 2 \quad \text{または} \quad b = 0, a = 1, p = 3$$

以上より

$$p = 2,\ x = 3, y = 3, \quad \text{又は} \quad p = 3,\ x = 1, y = 2$$

を得る．

$\boxed{\text{問題 3.2}}$

一般性を失うことなく $a \leqq b$ としてよい． $x^2-(ab)x+(a+b) = 0$ の解は $x = \dfrac{ab \pm \sqrt{(ab)^2 - 4(a+b)}}{2}$ ゆえ，$a+b \geqq 2$ より $ab > \sqrt{(ab)^2 - 4(a+b)}$. こうして x が自然数であるためには $n := \sqrt{(ab)^2 - 4(a+b)}$ 整数でなければならない（この段階では，逆は言えない！）．$(ab)^2 - 4(a+b) = n^2$ より

$$(3.2.1) \quad 4(a+b) = (ab-n)(ab+n)$$

よって，$(ab-n)(ab+n)$ は偶数であり，$ab \pm n$ は両方偶数か両方奇数であることから，$ab-n$ も $ab+n$ も偶数であることが分かる．ここで，次の不等式

$$(3.2.2) \quad ab \geqq a+b-1$$

を準備しておく．証明は簡単で，$a, b \geqq 1$ より

$$(a-1)(b-1) \geqq 0 \quad \therefore \quad ab+1 \geqq a+b$$

であることから分かる．次に

<u>$ab - n < 6$ であることを背理法で示す</u>

$(\because)$ $ab - n \geqq 6$ と仮定する．(3.2.1), (3.2.2) より，

$$4(a+b) \geqq 6(ab+n) \quad \therefore \quad \frac{2}{3}(a+b) \geqq ab+n \geqq (a+b)-1+n$$

$$1 \geqq \frac{1}{3}(a+b)+n > 1 \quad (\because\ n \geqq 1)$$

これは矛盾である．こうして，$ab - n < 6$. 特に，$ab-n$ は偶数より，$ab - n = 2$ または $ab - n = 4$ である

(1) $ab-n=2$ ならば (3.2.1) より

$$2(a+b)=ab+n=ab+(ab-2)=2ab-2.$$

$$\therefore \quad a+b=ab-1 \quad \therefore \quad (a-1)(b-1)=2$$

$a \leqq b$ より，$a-1=1,\ b-1=2 \quad \therefore \quad a=2, b=3, n=4.$

$$\therefore \quad x=\frac{6\pm 4}{2}=5,1$$

(2) $ab-n=4$ ならば (3.2.1) より $a+b=ab+n=ab+(ab-4)=2ab-4.$
両辺を 2 倍して

$$\therefore \quad (2a-1)(2b-1)=9$$

$a \geqq b$ を考慮すれば，$\begin{cases} 2a-1=1 \\ 2b-1=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a-1=3 \\ 2b-1=3 \end{cases}$

$(a,b)=(1,5),\ n=1$ または $(a,b)=(2,2),\ n=0.$

$\therefore \quad x=\dfrac{5\pm 1}{2}=3,2\text{if } (a,b,n)=(1,5,1)$ または $\quad x=\dfrac{4\pm 0}{2}=2 \text{ if } (a,b,n)=(2,2,0)$

問題 4.1

$$x^5-x^4-1=(x^2-x+1)(x^3-x-1)=\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}(x^3-x-1)=0$$

の実数解は $x^3-x-1=0$ の実数解である（逆も正しい）.

$f(x)=x^3-x-1$ とおくと，$f'(x)=3x^2-1=0$ の解は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ゆえ

極大値 $f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})=\dfrac{2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}<0$，極小値 $f(\dfrac{1}{\sqrt{3}})=\dfrac{-2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}<0.$

また，$f(1)=-1<0$ かつ $f(2)=5>0$ ゆえ，中間値の定理より $f(\alpha)=0$ なる $1<\alpha<2$ が唯一つ存在する．即ち，$x^3-x-1=0$ の実数解 α は $1<\alpha<2$ を満たす.

$y=\alpha x-x^2$ と x-軸で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_0^\alpha (\alpha x-x^2)\,dx=\int_0^\alpha x(\alpha-x)\,dx=\frac{\alpha^3}{6}=\frac{\alpha+1}{6} \quad (\because \quad \alpha^3=\alpha+1)$$

$$\therefore 1<6S-1=a<2 \quad \therefore \quad \frac{2}{3}<S<\frac{1}{2}$$

問題 4.2

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+(3-x)^2}$. $\therefore$ $f'(x)=\dfrac{3x(3-x)}{(x^2+(3-x)^2)^2}$. $f'(x)=0$ の解は $x=0,3.f(x)$ の極小値は $f(0)=0$ で，極大値は $f(3)=1$（詳しくは増減表及びグラフを描けば分かる）

(2)

$$I=\int_0^3 \frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx \overset{t=3-x}{=} \int_3^0 \frac{(3-t)^2}{t^2+(3-t)^2}\,(-dt)=\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx$$

$$\therefore \quad 2I=\int_0^3 \frac{x^2+(3-x)^2}{x^2+(3-x)^2}\,dx=\int_0^3 dx=3 \quad \therefore \quad I=\frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{問題 } 4.3}$

放物線 $y=x^2$ 上の点 (x,x^2) と円の中心 $(0,a)$ との距離を $\sqrt{h(x)}$ とおくと $h(x)=x^2+(a-x^2)^2.h'(x)=2x\,(2x^2-(2a-1))$. $h(x)$ の最小値（最短距離）を r とすれば，円 $C:\ x^2+(y-a)^2=r^2$ と放物線 $y=x^2$ は接する．

(i) $a \leqq \dfrac{1}{2}$ ならば $h'(x)=0$ の解は $x=0$ で $h(x)$ の最小値は $h(0)=a^2 \quad \therefore r=a.$

(ii) $a>\dfrac{1}{2}$ ならば $h'(x)=0$ の解は $x=0,\pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$. 増減表から $h(x)$ の最小値は $h(\pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}})=\dfrac{4a-1}{4}$，最大値は $h(0)=a^2$．よって，求める r は

$$r=\frac{\sqrt{4a-1}}{2}$$

<u>注意</u> 5.3. $\alpha=\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ とおく． $y=x-2$ の $x=\alpha$ での接線の方程式は $L:\ y=2\alpha x-\alpha^2$，即ち，$L:\ 2\alpha x-y-\alpha^2=0$. 点 $(0,a)$ から接線 L に下した垂線の長さ H は

$$H=\frac{|-a-\alpha^2|}{\sqrt{4\alpha^2+1}}=\frac{a+a-\frac{1}{2}}{\sqrt{4a-1}}=\frac{2a-\frac{1}{2}}{\sqrt{4a-1}}=\frac{1}{2}\frac{4a-1}{\sqrt{4a-1}}=r$$

$\boxed{\text{問題 } 4.4}$

(1) $y = \sqrt[3]{2x+1}$ とおくと，$2y+1 = x^3 \quad \therefore \quad y = \dfrac{x^3-1}{2}$．一方，$y^3 = 2x+1$ ゆえ $x = \dfrac{y^3-1}{2}$.

$$\begin{cases} (4.4.1) \quad y = \dfrac{x^3-1}{2} \\ (4.4.2) \quad x = \dfrac{y^3-1}{2} \end{cases}$$

$(4.4.1)-(4.4.2)$ より， $\quad y-x = \dfrac{x^3-y^3}{2} = \dfrac{(x-y)(x^2-xy+y^2)}{2}$.

$$\therefore (y-x)(x^2-xy+y^2+2) = 0$$

$x^2-xy+y^2+2 > 0$ ゆえ $x = y$. よって，

$$x = \sqrt[3]{2x+1} \quad \therefore x^3-2x-1 = (x+1)(x^2-x-1) = 0$$

こうして，

$$x = -1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

.

(2) $y = \sqrt[3]{2x+1}$，即ちグラフ $y^3 = 2x+1$ とグラフ $y = \dfrac{x^3-1}{2}$ は $y = x$ に関して対称である．$y = x$ と $y = \dfrac{x^3-1}{2}$ は 3 点 $x = -1, \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0, \alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ の異なる 3 点で交わる．したがって，$y = \sqrt[3]{2x+1}$ と $y = \dfrac{x^3-1}{2}$ は 3 点で交わり交点の x 座標は $x = \alpha < -1 < \beta$ である．こうして，求める部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\beta}\left(\sqrt[3]{2x+1} - \frac{x^3-1}{2}\right)dx + \int_{\alpha}^{-1}\left(\frac{x^3-1}{2} - \sqrt[3]{2x+1}\right)dx \\ &= \int_{-1}^{\beta}\left(\sqrt[3]{2x+1} - \frac{x^3-1}{2}\right)dx + \int_{-1}^{\alpha}\left(\sqrt[3]{2x+1} - \frac{x^3-1}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{8} + \frac{x}{2}\right]_{-1}^{\beta} + \left[\frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{8} + \frac{x}{2}\right]_{-1}^{\alpha} \end{aligned}$$

$\beta^2 = \beta+1, \alpha^2 = \alpha+1,\ \beta^3 = 2\beta+1, \alpha^3 = 2\alpha+1$ に注意すれば

$$S = \frac{1}{4}\beta^4 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\beta^4+\alpha^4}{4} + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}$$

ここで，$\beta^4 = (\beta+1)^2 = \beta^2 + 2\beta + 1 = 3\beta + 2$．同様に,$\alpha^4 = 3\alpha + 1$ より

$$S = \frac{3(\alpha+\beta)+4}{4} + \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$