数学問題高校編（その１）

問題および解説・解答

古島幹雄 *

2021 年 1 月 21 日

目 次

*熊本大学名誉教授 (E-mail： wagami@kumamoto-u.ac.jp)

1　複素数と平面ベクトルの問題

問題 1.1. 複素数 $z,\ w$ に対し，次を示せ．

(1.1.1) $|z+w| \leqq |z|+|w|$（三角不等式）．

(1.1.2) $\dfrac{|z+w|}{1+|z+w|} \leqq \dfrac{|z|}{1+|z|} + \dfrac{|w|}{1+|w|}$

問題 1.2. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ を $|z_i| < 1\ (1 \leqq i \leqq n)$ なる複素数とする．

(1.2.1) $1+|z_1z_2| > |z_1+z_2|$ を示せ．

(1.2.2) $n-1+|z_1z_2\cdots z_n| > |z_1+z_2+\cdots+z_n|$ を示せ．

問題 1.3. p を実数とする．3 次方程式 $z^3+pz+4=0$ が $z=1+i$ を解にもつとき，p の値を求め，残りの解も全て求めよ．

問題 1.4. z は $|z|=1$ を満たす複素数とする．

(1.3.1) $A = \dfrac{1}{3}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ の最大値および最小値を求めよ．

(1.3.2) $B = i\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$ の最大値および最小値を求めよ．

問題 1.5. 複素平面上の点 α, β, γ を頂点とする三角形が正三角形ならば

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

である．

問題 1.6. 複素数 α, β に対し

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} = \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 2i\,\mathrm{Im}\,(\alpha\bar{\beta})$$

と定義する．これは行列式と呼ばれている．この時，次を示せ．

(1) 複素平面上の $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix}\right|$$

(2) 複素平面上の α, β, γ を頂点とする三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix} \gamma-\alpha & \gamma-\beta \\ \overline{\gamma}-\overline{\alpha} & \overline{\gamma}-\overline{\beta} \end{pmatrix}\right|$$

(3) $\rho = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおく．そのとき，複素数 z に対し，$z,\ \rho z,\ \rho^2 z$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

問題 1.7. 複素平面上の異なる *2* 点 α, β を通る直線 ℓ の方程式は

$$(\overline{\beta-\alpha})(z-\alpha) = (\beta-\alpha)(\overline{z-\alpha}) \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} z-\alpha & \beta-\alpha \\ \overline{z}-\overline{\alpha} & \overline{\beta}-\overline{\alpha} \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0$$

で与えられる．

問題 1.8. 相異なる複素数 α, β, γ を頂点とする三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$ が $\angle\gamma\alpha\beta = \angle R$ なる直角三角形であるためには

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0$$

である．

問題 1.9. 複素平面上の点 α, β を通る直線 ℓ 外の点 γ から ℓ に下した垂線の長さ h は

$$h = \frac{1}{2}\,\frac{\left|(\gamma-\alpha)(\overline{\gamma}-\overline{\beta}) - (\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\gamma-\beta)\right|}{|\beta-\alpha|} = \frac{1}{2}\,\frac{\left|\det\begin{pmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \overline{\beta}-\overline{\alpha} & \overline{\gamma}-\overline{\alpha} \end{pmatrix}\right|}{|\beta-\alpha|}$$

ゆえに，α, β, γ を頂点とする三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}h\left|\beta-\alpha\right| = \frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \overline{\beta}-\overline{\alpha} & \overline{\gamma}-\overline{\alpha} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix} \gamma-\alpha & \gamma-\beta \\ \overline{\gamma}-\overline{\alpha} & \overline{\gamma}-\overline{\beta} \end{pmatrix}\right|$$

となる．

問題 1.10. $|a| < 1, |z| < 1$ なる複素数 a, z に対し

$$\left|\frac{a+z}{1+\bar{a}z}\right| < 1$$

を示せ．

問題 1.11. $m^2+n^2=k^2$ を満たす自然数 $m<n<k\leqq 25$ に対し，方程式

$$z^2=m+ni$$

の解は

$$z=\pm\left(\sqrt{\frac{k+m}{2}}+i\sqrt{\frac{k-m}{2}}\right)$$

因みに

$$\begin{aligned}(m,n,k) &= (3,4,5),(5,12,13),(7,24,25),(8,15,17),(9,40,41),(11,60,61),\\ &\quad (12,35,37),(13,84,85),(16,63,65),(20,21,29),(20,99,101),(28,45,53)\ldots\end{aligned}$$

など無数にある．

問題 1.12. 方程式 $|2z-i|=1$ で与えられる複素平面内の図形 S 上の点 z の偏角を θ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ とする．

(1) z を θ を用いて表せ．

(2) $i=\sqrt{-1}$ と z を結ぶ直線 L と実軸との交点を t とおく．そのとき t を θ を用いて表せ．

(3) $\cos\theta,\ \sin\theta$ を t を用いて表せ．

問題 1.13. 3 次方程式 $z^3=z+1$ の実数解を x，虚数解を u とする．このとき，

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}<x<\sqrt{2}$ を示せ．

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<|u|<1$ を示せ．

$(*)$ グラフの概形は p．５．

問題 1.14. a,b を実数とする．$x^3+ax+b=0$ の解を α,β,γ とするとき，

$$\Delta=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

を a,b で表せ．

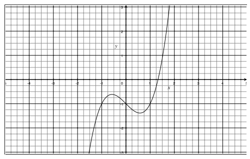

図 1: グラフ 1.13

2　数列・漸化式・極限の問題

問題 2.1.　実数 $x > 0$ に対し

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

を示せ.

3　２次方程式と漸化式の解説と問題

問題 3.1.

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$$

を示せ.

問題 3.2. 漸化式

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

の一般項 $\{a_n\}$ は $\alpha + \beta = -p \ \ \alpha\beta = q$ を満たす α, β（実は α, β は２次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解である！）を用いて

$$x_n = \frac{(x_2 - \alpha x_1)\beta^{n-1} - (x_2 - \beta x_1)\alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} \quad (\beta \neq \alpha)$$

と表されることを示せ.

特に，$\alpha = \beta$ の時は,

$$x_n = (n-1)x_2\alpha^{n-2} - (n-2)x_1\alpha^{n-1}$$

であることを示せ.

問題 3.3. 次の複素数

$$x_n = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i}$$

は全ての自然数 n について整数であることを示せ（数学的帰納法）.

問題 3.4.

$$x_{n+1}x_n = x_{n+1} + x_n + 3 \quad (x_1 = 2)$$

の一般項 x_n を求めよ.

問題 3.5. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を 2 以上の自然数とする．以下の関係式を満たす有限個の整数の数列 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$

$$\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = a_1 \\ x_k = a_k x_{k-1} - x_{k-2} \quad (2 \leqq k \leqq n) \\ 2x_n = n+1 \end{cases}$$

を考える．この時,

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{および} \quad T = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

を求めよ.

問題 3.6. 数学的帰納法で

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

を示せ.

4 微積分の問題（ここでは断らない限り対数は自然対数とする）

問題 4.1.

(1) $0 \leqq x < \dfrac{1}{\log 2}$ のとき，$1 + x\log 2 \leqq 2^x \leqq \dfrac{1}{1 - x\log 2}$ を示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{2^x-1}$ の値を求めよ.

(3) $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{2^k}}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ.

(5) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2^x}\,dx$ の値を求めよ.

問題 4.2. $2^{x-5}=x\ (x>0)$ の整数解を全て求めよ．但し, $\log 2=\log_e 2\fallingdotseq 0.69314$.

問題 4.3. $y=\sqrt{2-x}$ と $y=2-x^2$ で囲まれる部分の面積 S をもとめよ.

問題 4.4. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-(x^{-2})} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ は $x=0$ で微分可能かどうか調べよ．もし微分可能なら $f'(0)$ の値を求めよ.

問題 4.5. (1) $x\geqq\log(1+\tan x)\quad(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4})$ を示せ.

(2) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において $y=x$ と $y=\log(1+\tan x)$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ.

問題 4.6. $\displaystyle f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{\tan^2 t}{2^t+1}\,dt\quad(x\geqq 0)$ について

(1) $f'(x)$ および $f(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ.

問題 4.7. 次を示せ.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+(\cos x)^{\sin x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

問題 4.8. 整数 n に対し $a_n=n^2\,2^{-n}$ の最大値を求めよ．また，最大となる n も求めよ.

5 解答及び解説

$\boxed{\text{問題 1.1}}$

解説 1. まず，複素数 z に対して，次の事実を確認しておきましょう．

(1.1.a) $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \geqq \left|\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right|, \left|\dfrac{z-\overline{z}}{2}\right|$

実際，$z = \dfrac{z+\overline{z}}{2} + \dfrac{z-\overline{z}}{2} = \dfrac{z+\overline{z}}{2} + \left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right) i = (\mathrm{Re}\, z) + (\mathrm{Im}\, z)i.$

但し，$\mathrm{Re}\, z$ は z の実数部分を表し，$\mathrm{Im}\, z$ は z の虚数部分を表す．

$$|z| = \sqrt{\left|\frac{z+\overline{z}}{2}\right|^2 + \left|\frac{z-\overline{z}}{2i}\right|^2} = \sqrt{\left|\frac{z+\overline{z}}{2}\right|^2 + \left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right|^2} \geqq \left|\frac{z+\overline{z}}{2}\right|, \left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right|$$

(1.1.b) $\quad |z| \cdot |w| = |zw| = |\overline{zw}| = |\overline{z}w| = |z\overline{w}|$

(1.1.c) （シュワルツの不等式）$|z| \cdot |w| \geqq \left|\dfrac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}\right|.$

$$|z| \cdot |w| = |\overline{z}w| \geqq \left|\frac{\overline{z}w + \overline{\overline{z}w}}{2}\right| = \left|\frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2}\right| \quad \text{by (1.1.a)}$$

解答例.

(1.1.1)

$$\begin{aligned}
(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| - (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| - \left(|z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w\right) \\
&= 2\left(|z| \cdot |w| - \frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}\right) \\
&\geqq 2\left(|z| \cdot |w| - \left|\frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}\right|\right) \\
&\geqq 0 \quad \text{（シュワルツ不等式より）}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |z| + |w| \geqq |z+w|$$

(1.1.2)

$$
\begin{aligned}
\frac{|z+w|}{1+|z+w|} &= 1-\frac{1}{1+|z+w|} \\
&\leqq 1-\frac{1}{1+|z|+|w|} \quad \text{（三角不等式より）} \\
&= \frac{|z|+|w|}{1+|z|+|w|} = \frac{|z|}{1+|z|+|w|}+\frac{|w|}{1+|z|+|w|} \\
&\leqq \frac{|z|}{1+|z|+|w|}+\frac{|w|}{1+|z|+|w|} \\
&\leqq \frac{|z|}{1+|z|}+\frac{|w|}{1+|w|}
\end{aligned}
$$

□

問題 1.2

<u>**解答例**</u>(1.2.1) $|z_i|<1$ より $(1-|z_1|)(1-|z_2|)>0$

$$\therefore\ 1+|z_1z_2|>|z_1|+|z_2|\geqq|z_1+z_2|$$

$$\therefore\quad 1+|z_1z_2|>|z_1+z_2|$$

(1.2.2) 数学的帰納法で示す．$n=2$ の時は (1.2.1) より不等式が成立

そこで，$n-1+|z_1z_2\cdots z_n|>|z_1+z_2+\cdots+z_n|$ を仮定して

$$n+|z_1z_2\cdots z_n|>|z_1+z_2+\cdots+z_n+z_{n+1}|$$

を示せば良い．実際，$|z_1z_2\cdots z_n|<1$ より (1.2.1) の証明から

$$
\begin{aligned}
1+|\underline{z_1z_2\cdots z_n}\cdot z_{n+1}| &= 1+|z_1z_2\cdots z_n|\cdot|z_{n+1}| \\
\text{(1.2.1) より} &> |z_1z_2\cdots z_n|+|z_{n+1}| \\
\text{帰納法の仮定より} &> 1-n+|z_1+z_2+\cdots+z_n|+|z_{n+1}| \\
&\geqq 1-n+|z_1+z_2+\cdots+z_n+z_{n+1}|
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad 1+|z_1z_2\cdots z_n\cdot z_{n+1}|>1-n+|z_1+z_2+\cdots+z_n+z_{n+1}|$$

$$\therefore\quad n+|z_1z_2\cdots z_n\cdot z_{n+1}|>|z_1+z_2+\cdots+z_n+z_{n+1}|$$

$\boxed{\text{問題 1.3}}$

解説 2. 実数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $z^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が虚数解 α をもてばその共役複素数 $\overline{\alpha}$ もまた解である.

$\overline{z^3 + ax^2 + bx + c} = \overline{z}^3 + a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c = 0$ より，$\overline{z}$ も z が解なら $\overline{z}$ も解である.

注意 1. a, b, c が<u>複素数の時</u>は α が解でも $\overline{\alpha}$ が解とは限らない．例えば,

$(z+i)(z+2i)(z+3i) = z^3 + 6iz^2 - 11z - 6i = 0$ について解の共役複素数は決して解ではない.

解答例. $\alpha = 1+i,\ \overline{\alpha} = 1-i$ も解である．よって，z^3+pz+2 は $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2-2z+2$ で割り切れる．$z^3+pz+2 = (z+2)(z^2-2z+2)+(p+2)z$ より，$p = -2$ であり，残りの解は $1-i,\ -2$ である.

□

$\boxed{\text{問題 1.4}}$

解答例. $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とおく．$\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ であることに注意.

(1) $A = \dfrac{2}{3}\cos\theta$．よって，$-\dfrac{2}{3} \leqq A \leqq \dfrac{2}{3}$. $\therefore \max A = \dfrac{2}{3},\ \min A = -\dfrac{2}{3}$

(2) $B = -2\sin\theta$ よって，$-2 \leqq B \leqq 2$. $\therefore \max B = 2,\ \min B = -2$

$\boxed{\text{問題 1.5}}$

解答例. α, β, γ は 1 直線上にないので，$\mathrm{Im}\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \neq 0$（問題 1.8）よって，$\gamma + \beta - 2\alpha = (\gamma-\alpha) + (\beta-\alpha) \neq 0$. 仮定から $\gamma - \alpha$ は $\beta - \alpha$ を 60° 回転したもの.

$$\therefore \quad \gamma - \alpha = e^{\pm\frac{\pi}{3}i} \cdot (\beta - \alpha) \iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$$

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^3 = e^{\pm\pi} = -1 \iff (\gamma-\alpha)^3 + (\beta-\alpha)^3 = 0$$

$\therefore\ (\gamma-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3=(\gamma+\beta-2\alpha)\left\{(\gamma-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\right\}=0$

$\gamma+\beta-2\alpha\neq 0$ より $(\gamma-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0.$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

$\boxed{\text{問題 } 1.6}$

解説 3. 複素数 z の実数部分を $\mathrm{Re}\,z$，虚数部分を $\mathrm{Im}\,z$ とかく．この時，

$z=\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z,\quad \overline{z}=\mathrm{Re}\,z-i\,\mathrm{Im}\,z,\quad |z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2}$

一方，

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad \mathrm{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

$$\therefore |z|=\sqrt{\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2}\qquad\therefore\quad |z|^2=\left|\frac{z+\overline{z}}{2}\right|^2+\left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right|^2$$

このことから

補題 1 (ラグランジュの恒等式)**.**

$$|z|^2\cdot|w|^2\left(=|zw|^2=|\overline{z}w|^2\right)=\left|\frac{\overline{z}w+z\overline{w}}{2}\right|^2+\left|\frac{\overline{z}w-z\overline{w}}{2}\right|^2$$

$$\therefore\quad |z|\cdot|w|=\sqrt{\left|\frac{\overline{z}w+z\overline{w}}{2}\right|^2+\left|\frac{\overline{z}w-z\overline{w}}{2}\right|^2}=\sqrt{\left|\frac{\overline{z}w+z\overline{w}}{2}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix}\overline{z} & z\\ \bar{w} & w\end{pmatrix}\right|^2}$$

系 1 (シュワルツの不等式)**.**

$$|z|\cdot|w|\geqq\left|\frac{\overline{z}w+z\overline{w}}{2}\right|=|\mathrm{Re}\,(\overline{z}w)|$$

補題 2 (余弦定理)**.** 2つの複素数 $z,\ w$ に対し，原点 0 を $z,\ w$ を結ぶ線分 $\overline{0z}$ と $\overline{0w}$ のなす角を θ とする．この時，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{Re}\,(\overline{z}w)}{|z|\cdot|w|}$$

w を z を反時計回りに θ 回転して $\dfrac{|w|}{|z|}$ 倍した点であることに注意すれば,

$$w = z\frac{|w|}{|z|}e^{i\theta} \quad \therefore \quad \underline{\overline{z}w} = \overline{z}z\frac{|w|}{|z|}e^{i\theta} = |z|^2\frac{|w|}{|z|}e^{i\theta} = |z|\cdot|w|e^{i\theta} = \underline{|z|\cdot|w|(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

よって,

$$\mathrm{Re}\,(\overline{z}w) = |z|\cdot|w|\cos\theta \quad \therefore \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\,(\overline{z}w)}{|z|\cdot|w|}$$

<u>解答例</u>. (1) 線分 $\overline{0\alpha}$, $\overline{0\beta}$ のなす角を θ とすれば

$$S = \frac{1}{2}|\overline{0\alpha}|\cdot|\overline{0\beta}|\sin\theta = |\alpha|\cdot|\beta|\sin\theta.$$

$$\therefore 4S^2 = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2\sin^2\theta = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2(1-\cos^2\theta) = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2-(|\alpha|\cdot|\beta|\cos\theta)^2$$

補題 1.1, 補題 1.2 より

$$\therefore 4S^2 = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2-(\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}\beta))^2 = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2-\left|\frac{\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \alpha\\ \bar{\beta} & \beta\end{pmatrix}\right|^2$$

$$S = \frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \alpha\\ \bar{\beta} & \beta\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\,(\overline{\alpha}\beta)\right|$$

□

(2) α, β, γ を頂点とす三角形の面積は 0, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ を頂点とする三角形の面積に等しいので, (1) より結論を得る.

(3)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\left|\det\begin{pmatrix}\overline{\rho^2 z}-\overline{z} & \rho^2 z - z\\ \overline{\rho^2 z}-\overline{\rho z} & \rho^2 z-\rho z\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{4}\left|z\cdot\overline{z}\ \det\begin{pmatrix}\overline{\rho^2}-1 & \rho^2-1\\ \overline{\rho^2}-\overline{\rho} & \rho^2-\rho\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{|\rho-\overline{\rho}|}{4}\,|z|^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|z|^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 1.7}}$

<u>**解答例**</u>**.** 複素平面上の異なる *2* 点 α, β を通る直線 ℓ 上の任意の点を z とする．ベクトル $\overrightarrow{\alpha\beta}$ と $\overrightarrow{\alpha z}$ は平行ゆえ

$$\overrightarrow{\alpha z} = k\overrightarrow{\alpha\beta} \overset{\text{同義}}{\Longleftrightarrow} z - \alpha = k(\beta - \alpha)$$

を満たす実数 k が存在する．

$$\therefore \quad \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = k\,(\text{実数}) \quad \therefore \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0$$

一方,

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{(z-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})}{|\beta-\alpha|^2}\right\} = \frac{1}{|\beta-\alpha|^2}\mathrm{Im}\left\{(z-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})\right\} = 0$$

$|\beta - \alpha| > 0$ より

$$\mathrm{Im}\left\{(z-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})\right\} = 0 \Longleftrightarrow \frac{(z-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha}) - (\overline{z}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)}{2i} = 0$$

よって,

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})(z-\alpha) = (\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} z-\alpha & \beta-\alpha \\ \overline{z}-\overline{\alpha} & \overline{\beta}-\overline{\alpha} \end{pmatrix} = 0$$

一方, 相異なる複素数 α, β, γ が一直線上にあるための必要十分条件は 2 点 α, β を通る直線 ℓ 上に点 γ があるということである．こうして, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0$ に $z = \gamma$ を代入して $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0$ を得る．特に,

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0 \overset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Re}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \neq 0$$

□

$\boxed{\text{問題 1.8}}$

<u>**解答例**</u>**.** 題意から, ベクトル $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ とベクトル $\overrightarrow{\alpha\beta}$ とは直交する．このことは,

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \gamma - \alpha = (\beta-\alpha)\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$$

$$\therefore \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm i\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| \ \textit{(純虚数)} \quad \therefore \quad \mathrm{Re}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0$$

$\boxed{\text{問題 1.9}}$

解答例. 複素平面上の 2 点 α, β を通る直線の方程式は

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=0 \Longleftrightarrow (\overline{\beta}-\overline{\alpha})(z-\alpha)-(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=0$$

であった． $z=x+yi,\ \alpha=a+bi,\ \beta=c+di$ とおけば

$$\frac{(\overline{\beta}-\overline{\alpha})(z-\alpha)-(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})}{2i}=\{(d-a)(x-a)-(c-a)(y-b)=0\}$$

を得る． $\gamma=p+qi$ から下した垂線の長さ h は　$|\beta-\alpha|=\sqrt{(d-a)^2+(c-a)^2}$ に注意すれば

$$h=\frac{|(d-a)(p-a)-(c-a)(q-b)|}{\sqrt{(d-a)^2+(c-a)^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{\left|(\gamma-\alpha)(\overline{\gamma}-\overline{\beta})-(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\gamma-\beta)\right|}{|\beta-\alpha|}$$

$\boxed{\text{問題 1.10}}$

解答例.

$$\begin{aligned}
|1+\overline{a}z|^2-|a+z|^2 &= (1+\overline{a}z)(1+a\overline{z})-(a+z)(\overline{a}+\overline{a}+\overline{z})\\
&= |a|^2\cdot|z|^2-(|z|^2+|a|^2)\\
&= (|z|^2-1)(|a|^2-1)>0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |1+\overline{a}z|^2>|a+z|^2 \quad\therefore\quad \left|\frac{a+z}{1+\bar{a}z}\right|<1$$

$\boxed{\text{問題 1.11}}$

解答例.

$$\begin{aligned}
z^2 &= \left(\sqrt{\frac{k+m}{2}}+i\sqrt{\frac{k-m}{2}}\right)^2\\
&= \frac{k+m}{2}-\frac{k-m}{2}+2i\sqrt{\frac{(k+m)(k-m)}{4}}\\
&= m+i\sqrt{k^2-m^2}=m+i\sqrt{n^2}=m+ni
\end{aligned}$$

$m^2+n^2=k^2$ を満たす自然数 $m<n<k \leqq 25$ は

$$(m,n,k)=(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25).$$

故に，$z=\pm(2+i),\ \pm(3+2i),\ \pm(4+3i)$

$\boxed{\text{問題 1.12}}$

<u>解答例</u>. (1) 初等幾何（中学レベル）により，$\triangle 0zi$ は直角三角形である．一方，$\angle 0iz=\theta$ より $\overline{0z}=\sin\theta$.

$$\therefore \quad z=\sin\theta\cos\theta+i\sin^2\theta=\sin\theta\, e^{i\theta}$$

(2) $\triangle i0t$ は直角三角形．よって $t=\tan\theta$.

(3) $\quad 0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{2}$ より $\cos\theta>0,\sin\theta>0$.

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+t^2}\ \therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}\qquad\therefore\sin\theta=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

特に，

$$z=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+i\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$\boxed{\text{問題 1.13}}$

<u>解答例</u>. (1) $f(x)=x^3-x-1$ とおく．$f'(x)=3x^2-1=0$ の解は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. $f''(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}})<0$ より，極大値および極小値 $f(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}})<0$. こうして，$y=f(x)$ のグラフの概形は図１．こうして，$x^3=x+1$ はただ一つの正の実数解をもつ．$f(\dfrac{2}{\sqrt{3}})<0,\ f(\sqrt{2})>0$ より，中間値の定理から $x^3=x+1$ の実数解は $\dfrac{2}{\sqrt{3}}<x<\sqrt{2}$ を満たす．

(2) u を $z^3 = z+1$ の虚数解とすればその共役複素数 $\overline{u}$ もまた解である．
解と係数の関係から

$$\begin{cases} x+u+\overline{u}=0 \\ |u|^2+x(u+\overline{u})=-1 \\ |u|^2x=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} |u|^2-x^2=-1 \ \cdots \text{(i)} \\ |u|^2x=1 \ \cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

(ii) および (1) より，$|u|^2 = \dfrac{1}{x} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1 \therefore\ |u| < 1$.
一方，(i) から $|u|^2 = x^2 - 1 > \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{3} \quad \therefore |u| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 以上より $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < |u| < 1$ が示された．

$\boxed{\text{問題 1.14}}$

<u>**解答例**</u>. 解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a \\ \alpha\beta\gamma=-b \end{cases}$$

$f(x) = x^3+ax+b = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ とおくと，

$$f'(x) = 3x^2+a = (x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\therefore \quad f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma) = -(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 = -\Delta$ 一方，

$$\begin{aligned} -\Delta &= f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma) = (3\alpha^2+a)(3\beta^2+a)(3\gamma^2+a) \\ &= a^3+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+9(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+27\alpha^2\beta^2\gamma^2 \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = -2a \\ \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = a^2 \end{aligned}$$

より

$$-\Delta = a^3-6a^3+9a^3+27b^2 = 4a^3+27b^2$$

$$\Delta = -(4a^3+27b^2)$$

$\boxed{\text{問題 2.1}}$

<u>**解答例**</u>**.** 実数 $x > 0$ に対して，$n \leqq x < n+1$ を満たす自然数 n が唯一つ存在する．ここに，n は x に依存する．

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n} \\ &< \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \to \infty$ なら $n \to \infty$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leqq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leqq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\therefore \quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \leqq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

命題 1. $n \geqq 1$ に対して次を示せ.

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

(2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$

(4) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < 3$

Proof. (1) $k \geqq 1$ に対し

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{k!}\cdot\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{(n+1)^k} = \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = \frac{1}{k!}\cdot\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) < \frac{1}{k!}\cdot\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right) = \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{(n+1)^k}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} < \sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{(n+1)^k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{(n+1)^k}+\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{(n+1)^k}$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} < \sum_{k=0}^{n+1}\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}{(n+1)^k} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(2)

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) < \frac{1}{k!} \quad (\because)\ \left(1-\frac{i}{k}\right) < 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

(3) $2^{k-1} \leqq k! \quad (k \geqq 1)$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

(4)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

□

問題 3.1

解答例. $u=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}>0,\ v=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}<0$ とおく.

$$\begin{cases} u^3+v^3 = 7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2} = 14 \\ u^3v^3 = (7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2}) = -1 \end{cases}$$

$\therefore \quad uv=-1$

$\therefore \quad u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)=(u+v)^3+3(u+v)=14$

$$\begin{aligned}(u+v)^3+3(u+v)-14 &= (u+v)^3-2^3+3\left((u+v)-2\right)\\ &= (u+v-2)\left\{(u+v)^2+2(u+v)+7\right\}\\ &= (u+v-2)\left\{(u+v+1)^2+6\right\}\end{aligned}$$

u,v は実数だから $(u+v+1)^2+6\neq 0.$

$$\therefore u+v=2 \quad \therefore \quad \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$$

問題 3.2

解答例.

$$x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = x_{n+2}-(\alpha+\beta)x_{n+1}+\alpha\beta x_n = 0$$

$$\begin{cases} x_{n+2}-\alpha x_{n+1} = \beta(x_{n+1}-\alpha x_n)\cdots\text{(i)} \\ x_{n+2}-\beta x_{n+1} = \alpha(x_{n+1}-\beta x_n)\cdots\text{(ii)} \end{cases}$$

(i),(ii) より数列 $\{x_{n+1}-\alpha x_n\}$ は初項 $x_2-\alpha x_1$，公比 β の等比数列であり $\{x_{n+1}-\beta x_n\}$ は初項 $x_2-\beta x_1$，公比 α の等比数列である．従って一般項は

$$\begin{cases} x_{n+1}-\alpha x_n = \beta^{n-1}(x_2-\alpha x_1)\cdots\text{(iii)} \\ x_{n+1}-\beta x_n = \alpha^{n-1}(x_2-\beta x_1)\cdots\text{(iv)} \end{cases}$$

(iii) − (iv) より，

$$(\beta-\alpha)x_n=\beta^{n-1}(x_2-\alpha x_1)-\alpha^{n-1}(x_2-\beta x_1)$$

よって，$\beta\neq\alpha$ ならば，一般項 x_n は

$$x_n=\frac{(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-1}-(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}\quad(\beta\neq\alpha)$$

一方，$\beta=\alpha$ ならば (iii) または (iv) により $x_{n+1}-\alpha x_n=\alpha^{n-1}(x_2-\alpha x_1)$

$$\therefore\quad\frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{x_n}{\alpha^n}=\frac{x_2-\alpha x_1}{\alpha^2}=\frac{x_2}{\alpha^2}-\frac{x_1}{\alpha}$$

こうして数列 $\left\{\frac{x_n}{\alpha^n}\right\}$ は初項 $\frac{x_1}{\alpha}$ 公差 $\frac{x_2}{\alpha^2}-\frac{x_1}{\alpha}$ の等差数列．よって一般項

$$\frac{x_n}{\alpha^n}=\frac{x_1}{\alpha}+(n-1)\left(\frac{x_2}{\alpha^2}-\frac{x_1}{\alpha}\right)$$

$$\therefore\quad x_n=(n-1)x_2\alpha^{n-2}-(n-2)x_1\alpha^{n-1}$$

例題 1 (フィボナッチ数列)**.**

$$x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0\quad(x_1=x_2=1)$$

の一般項について

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\therefore\ \alpha+\beta=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x_n &= \frac{(1-\alpha)\beta^{n-1}-(1-\beta)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

例題 2. $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0\quad(x_1=1,x_2=3)$ の一般項は

$$\alpha=\beta=2,\ x_1=1,x_2=3$$

より，上記の公式から

$$x_n=(n-1)3\cdot2^{n-2}-(n-2)1\cdot2^{n-1}=2^{n-2}(n+1)$$

例題 3. $x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n=0 \quad (x_1=1,x_2=2)$ の一般項は

$$\alpha=1-i,\ \beta=1+i,\ x_1=1,\ x_2=2$$

より，$\alpha+\beta=2$ 上記の公式から

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-1}-(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{(2-\alpha)\beta^{n-1}-(2-\beta)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha} = \frac{\beta\beta^{n-1}-\alpha\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha} = \frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha} \\
&= \frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i} = \mathrm{Im}\,(1+i)^n
\end{aligned}$$

問題 3.3

解答例. 複素数 z,w に対し，

$$\mathrm{Im}\,(z+w)=\mathrm{Im}\,(z)+\mathrm{Im}\,(w)\ ,\ \mathrm{Re}\,(z+w)=\mathrm{Re}\,(z)+\mathrm{Re}\,(z)$$

$$\mathrm{Im}\,(iz)=\mathrm{Re}\,(z)\ ,\ \mathrm{Re}\,(iz)=-\mathrm{Im}\,(z)$$

そこで，$\mathrm{Im}\,(1+i)^n,\ \mathrm{Re}\,(1+i)^n$ が整数なら $\mathrm{Im}\,(1+i)^{n+1},\ \mathrm{Re}\,(1+i)^{n+1}$ は整数であることを示す．実際

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(1+i)^{n+1} &= \mathrm{Im}\ \{(1+i)(1+i)^n\} = \mathrm{Im}\ \{(1+i)^n+i(1+i)^n\} \\
&= \mathrm{Im}\,(1+i)^n+\mathrm{Im}\,i(1+i)^n = \mathrm{Im}\,(1+i)^n+\mathrm{Re}\,(1+i)^n \\
\mathrm{Re}\,(1+i)^{n+1} &= \mathrm{Re}\ \{(1+i)(1+i)^n\} = \mathrm{Re}\ \{(1+i)^n+i(1+i)^n\} \\
&= \mathrm{Re}\,(1+i)^n+\mathrm{Re}\,i(1+i)^n = \mathrm{Re}\,(1+i)^n-\mathrm{Im}\,(1+i)^n
\end{aligned}$$

から分かる．または

$x_n=\mathrm{Im}\,(1+i)^n$ なので

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= \mathrm{Im}\,(1+i)^{n+2} = \mathrm{Im}\,(1+i)^2(1+i)^n = \mathrm{Im}\ (2i(1+i)^n) = 2\mathrm{Im}\ (i(1+i)^n) \\
&= 2\mathrm{Re}\,(1+i)^n \\
x_{n+1} &= \mathrm{Im}\,(1+i)^{n+1} = \mathrm{Im}\,(1+i)(1+i)^n = \mathrm{Im}\,(1+i)^n+\mathrm{Im}\ (i(1+i)^n) \\
&= \mathrm{Im}\,(1+i)^n+\mathrm{Re}\,(1+i)^n \\
&= x_n+\frac{1}{2}x_{n+2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

よって，$x_k\ (k \leqq n+1)$ まで整数とすれば x_{n+2} もまた整数である．

(*) 数学的帰納法の正確な証明法については省略した．

$\boxed{\text{問題 3.4}}$

解答例. $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1) = 4$. 数学的帰納法から，全ての n について $x_n > 1$ が分かる．一方，2 を底とする対数をとって，

$$\log_2(x_{n+1} - 1) + \log_2(x_n - 1) = \log_2 4 = 2$$

$$\{\log_2(x_{n+1} - 1) - 1\} = -\{\log_2(x_n - 1) - 1\}$$

$$\therefore \quad \log_2(x_n - 1) - 1 = (-1)^{n-1}\{\log_2(x_1 - 1) - 1\} = (-1)^n$$

$$\log_2(x_n - 1) = 1 + (-1)^n \quad \therefore x_n = 1 + 2^{1+(-1)^n}$$

こうして

$$x_n = \begin{cases} 5 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 2 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{問題 3.5}}$

解答例. $x_k - x_{k-1} = (a_k - 1)x_{k-1} - x_{k-2} > x_{k-1} - x_{k-2}\ (k \geqq 2)$. 数学的帰納法により $x_k > x_{k-1}\ (1 \leqq k \leqq n+1)$ が示せる．

$$\therefore \quad x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = n+1$$

ここで，$x_k\ (0 \leqq k \leqq n)$ は整数なので

$$x_0 = 1, x_1 = 2, \ldots, x_k = k+1, \ldots, x_n = n+1$$

を得る．一方，$x_k = a_k x_{k-1} - x_{k-2}$ より

$$k + 1 = k a_k - (k-1) \quad \therefore\ a_k = 2\ (k \geqq 1).$$

以上より，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n \\ T &= \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 3.6}}$

<u>**解答例**</u>. $n \Rightarrow n+1$ は以下の通り.

$$\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(n+1)x = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin(n+1)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2} + 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left\{\sin\frac{nx}{2} + 2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\right\}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left\{\sin\frac{nx}{2} + \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}-\frac{x}{2}\right)\right\}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left\{\sin\frac{nx}{2} + \sin\frac{(n+2)x}{2} - \sin\frac{nx}{2}\right\}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$\boxed{\text{問題 4.1}}$

<u>**解答例**</u>.

(1) $f(x) = 2^x - (\log 2)x - 1$ とおく． $f'(x) = \log 2(2^x - 1)$.$f'(x) = 0$ の解は $x = 0$． $f''(0) = (\log 2)^2 > 0$ より $f(x)$ は $x = 0$ で極小値 $f(0) = 0$ をとる．従って，$f(x) \geqq 0$，即ち，$2^x \geqq (\log 2)x + 1$. 一方　$g(x) = 2^{-x} + x\log 2 - 1$ とおく． $g'(x) = \log 2(1 - 2^{-x})$. $g'' = (\log 2)^2 2^{-x}$ より $g(x)$ は $x = 0$ で極小値 $g(0) = 0$ をとる．こうして $g(x) \geqq 0$，即ち，$2^{-x} \geqq -(\log 2)x + 1$.　 $0 \leqq x < \dfrac{1}{\log 2}$ ならば，$1 - x\log 2 > 0$ より，$2^x \leqq \dfrac{1}{1 - x\log 2)}$. 以上より，

$$1 + x\log 2 \leqq 2^x \leqq \frac{1}{1 - x\log 2}$$

を得る.

(2) (1) より $0 \leqq x < \dfrac{1}{\log 2}$ の時,　　$x \log 2 \leqq 2^x - 1 \leqq \dfrac{x \log 2}{1 - x \log 2}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{\log 2} \leqq \frac{x}{2^x - 1} \leqq \frac{1 - x \log 2}{\log 2}$$

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - x \log 2}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$ より，$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{2^x - 1} = \frac{1}{\log 2}$

(3)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{2^k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \right)^k = \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \left\{ 1 - (\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}})^n \right\}}{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

(4) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{2^{\frac{1}{n}} - 1}$. $x = \dfrac{1}{n}$ とおくと，$n \to \infty$ のとき $x \to 0$.

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2^x - 1} = \frac{1}{2 \log 2}$$

(5)

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$$

より，$f(x) = 2^{-x}$ とおくと，

$$\int_0^1 2^{-x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2^x}\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{2^{\frac{k}{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2 \log 2} \ (\because (4))$$

因みに，上記定積分は直接計算できる．実際,

$$\int_0^1 \frac{1}{2^x}\, dx = \int_0^1 2^{-x}\, dx = \left[\frac{-2^{-x}}{\log 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{2 \log 2} = \frac{1}{2 \log 2}$$

$\boxed{\text{問題 4.2}}$

解答例. 試しに $x = 8$ を代入すれば $2^{8-5} = 8 = 2^3$ なので $x = 8$ は一つの整数解である．$\log 2 > 0.5 = \dfrac{1}{2}$ に着目して $f(x) = 2^x - 32x$ とおく，$x > 8$ ならば $f'(x) = (\log 2) 2^x - 32 > \frac{1}{2} 2^x - 2^5 = 2^{x-1} - 2^5 > 0$．よって,

$f(x)$ は単調増加関数．また，$f(8)=0$ より，$x>8$ ならば $f(x)>0$ となり，$f(x)=0$ の解はこの範囲にない．よって，$x \leqq 8$. 一方，$x \leqq 5$ ならば $f'(x)=(\log 2)2^x-32<2^x-32 \leqq 2^5-32=0$ よって，$f(x)$ は単調減少であり，$f(5)=2^5-5\cdot 32<0$ なので $f(x)=0$ の解はこの範囲にない．以上で，$f(x)=0$ の解は $5<x \leqq 8$ の中にある．整数解は $x=6,7,8$ を代入してみれば $x=8$ しかない．

$\boxed{\text{問題 4.3}}$

解答例. $y=\sqrt{2-x}$ と $y=2-x^2$ の交点を求める（グラフを描いてみれば交点は２つあることが分かる）．$\sqrt{2-x}=2-x^2$ から $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$2-x=(2-x-2)^2 \ \therefore x^4-4x^2+x+2=(x-1)(x+2)(x^2-x-1)=0$

よって，$x=1,\ x=\alpha := \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (ただし, $\alpha^2=\alpha+1$).

$$S=\int_\alpha^1 \left((2-x^2)-\sqrt{2-x}\right)\,dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_\alpha^1$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{7}{3}-\left\{2\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{3}(2-\alpha)^{\frac{2}{3}}\right\} \\
&= \frac{7}{3}-\left\{2\alpha-\frac{2\alpha+1}{3}+\frac{2}{3}(2-\alpha^2)^3\right\} \because \alpha^3=2\alpha+1, \sqrt{2-\alpha}=2-\alpha^2 \\
&= \frac{7}{3}-\left\{2\alpha-\frac{2\alpha+1}{3}+\frac{2}{3}(1-\alpha)^3\right\} \ (\because 2-\alpha^2=1-\alpha) \\
&= \frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3} \ (\because (1-\alpha)^3=-2\alpha+3)
\end{aligned}$$

注意 2. $a>1$ のとき．$\sqrt{a-x}=a-x^2$ の解を求めよう．解は $-\sqrt{a} \leqq x \leqq \sqrt{a}$ の範囲に２個ある．両辺を平方して $a-x=(a-x^2)^2$

$$\therefore a^2-(2x^2+1)a+x^4+x=0$$

$$a=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2}=\begin{cases} x^2+x \\ x^2-x+1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x^2+x-a=0 \\ x^2-x+1-a=0 \end{cases}$$

実は,

$$a-x=(a-x^2)^2 \Longleftrightarrow (x^2+x-a)(x^2-x+1-a)=0$$

よって, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2}, \quad \text{or} \quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$. $-\sqrt{a} \leqq x \leqq \sqrt{a}$ より, 解は $\beta=\dfrac{-1+\sqrt{4a+1}}{2} > \alpha=\dfrac{1-\sqrt{4a-3}}{2}$

$$S=\int_\alpha^\beta \left\{(a-x^2)-\sqrt{a-x}\right\}\,dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}}\right]_\alpha^\beta$$

$\beta^2=a-\beta, \quad \alpha^2=\alpha+a-1$ に注意して計算する.

$$\begin{aligned}
S &= a\beta-\frac{\beta^3}{3}+\frac{2}{3}(a-\beta)^{\frac{3}{2}}-\left\{a\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{3}(a-\alpha)^{\frac{3}{2}}\right\} \\
&= a\beta-\frac{\beta^3}{3}+\frac{2}{3}(a-\beta^2)^3-\left\{a\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{3}(a-\alpha^2)^3\right\} \\
&= a\beta-\frac{\beta^3}{3}+\frac{2}{3}\beta^3-\left\{a\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{3}(1-\alpha)^3\right\} \\
&= a\beta+\frac{\beta^3}{3}-\left\{a\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{3}(1-\alpha)^3\right\} \\
&= a\beta+\frac{(a+1)\beta-a}{3}-\left\{a\alpha-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{3}\left(1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3\right)\right\} \\
&= a\beta+\frac{(a+1)\beta-a}{3}-\left\{a\alpha-\alpha^3+2(\alpha^2-\alpha)+\frac{2}{3}\right\} \\
&= a\beta+\frac{(a+1)\beta-a}{3}-\left\{a\alpha-(a\alpha+(a-1))+2(a-1)+\frac{2}{3}\right\} \\
&= \frac{4a+1}{3}\beta-\frac{a}{3}-\left(a-\frac{1}{3}\right)=\frac{\beta+1}{3} \\
&= \frac{1+\sqrt{4a+1}}{6}
\end{aligned}$$

特に, $a=2$ なら $S=\dfrac{1+\sqrt{9}}{6}=\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\text{問題 4.4}}$

解答例.

(1) まず, $\lim_{t\to\infty}\frac{|t|}{e^{t^2}}=0$ を示す．実際, $g(x)=e^x-x-1$ とおくと, $g'(x)=0$ の解は $x=0$．$g''(0)=1>0$ ゆえ，$g(0)=0$ は極小値．よって，$g(x)\geqq 0$, 即ち，$e^x\geqq x+1$, $\quad\therefore\ e^{t^2}\geqq t^2+1$

$$\therefore 0\leqq\frac{|t|}{e^{t^2}}\leqq\frac{|t|}{t^2+1}=\frac{1}{|t|+\dfrac{1}{|t|}}\to 0\quad(t\to\infty)$$

このことから $t\to\infty$ の時，$\lim_{t\to\infty}\frac{|t|}{e^{t^2}}=0$ を得る．そこで，$t=\frac{1}{x}$ とおくと，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$$

(2) さて，$f(x)$ の $x=0$ での微分可能性の定義に戻ると，次の極限値が有限確定値として存在するときに $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であり，その極限値を $f'(0)$ で表した．今，(1) より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$$

なので，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であり，$f'(0)=0$ である．

問題 4.5

証明 1. (1) $f(x)=x-\log(1+\tan x)$ とおくと，

$$f'(x)=1-\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}=\frac{\tan x(1-\tan x)}{1+\tan x}$$

$f'(x)=0$ の解は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲では $x=0,\ \frac{\pi}{4}$ である．

$$\therefore\ f'(x)\geqq 0$$

但し，等号は $x=0,\ \frac{\pi}{4}$. こうして，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲では $f(x)$ は単調増加である．$f(0)=0$ より,

$$f(x)\geqq f(0)=0\quad(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}).$$

ゆえに，

$$x\geqq\log(1+\tan x)\quad(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4})$$

が成り立つ．

(2)

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{x - \log(1+\tan x)\}\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\, dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \frac{\sin x}{\cos x})\, dx = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log(\sin x + \cos x) - \log\cos x)\, dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\log\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) - \log\cos x\right\} dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\log\sqrt{2} + \log\cos(\frac{\pi}{4} - x) - \log\cos x\right\} dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sqrt{2}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos(\frac{\pi}{4} - x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos x\, dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8}\log 2 + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \log\cos u\,(-du) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos x\, dx \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8}\log 2 + \left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos u\, du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos x\, dx\right\} \\
&= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{8}\log 2 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \log 2\right)
\end{aligned}
$$

注意 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\, dx$ について次のように求めることができる．
$f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log(1+\tan x)\, dx$ とおく．そのとき，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\log\left(1 + \tan(\frac{\pi}{4} - x)\right) - \log(1+\tan x) \\
&= -\log\left(1 + \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right) - \log(1+\tan x) \\
&= -\log\frac{2}{1+\tan x} - \log(1+\tan x) \\
&= -\log 2 + \log(1+\tan x) - \log(1+\tan x) \\
&= -\log 2
\end{aligned}
$$

$f'(x) = -\log 2$ より $f(x) = (-\log 2)x + C$．一方，

$$
f(\frac{\pi}{8}) = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \log(1+\tan x)\, dx = 0
$$

$\therefore 0 = (-\log 2)\dfrac{\pi}{8} + C \quad \therefore\ C = \dfrac{\pi}{8}\log 2$ よって，

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{8} - x\right)\log 2 \quad \therefore\ f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\cdot\log 2$$

□

問題 4.6

解答例.

注意 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2} = 0$$

を示す

Proof. $f(x) = \tan x - x$, $g(x) = x^2$ とおく． $f(0) = g(0) = 0$ かつ $x \neq 0$ なら $g'(x) = 2x \neq 0$. コーシーの平均値の定理より

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{\tan x - x}{x^2} = \frac{\tan^2\theta x}{2\theta x} = \frac{\sin\theta x}{\theta x}\cdot\frac{\sin\theta x}{\cos^2\theta x}$$

を満たす $0<\theta<1$ が少なくとも一つ存在する． $x\to 0$ なら $\theta x \to 0$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2} = \lim_{\theta x\to 0}\frac{\sin\theta x}{\theta x}\lim_{\theta x\to 0}\frac{\sin\theta x}{\cos^2\theta x} = 1\cdot 0 = 0$$

または，ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\,(1+\tan^2 x)}{2} = 0$$

□

問題の解答.

(1)

$$f'(x) = \frac{\tan^2 x}{2^x+1} - (-1)\frac{\tan^2(-x)}{2^{-x}+1} = \tan^2 x\left(\frac{1}{2^x+1}+\frac{1}{2^{-x}+1}\right) = \tan^2 x$$

$\therefore f(x) = \tan x - x + C$. $f(0)=0$ より $C=0$. よって，

$$f(x) = \tan x - x$$

(2) 注意 4.3 より $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2}=0$

注意 5 (コーシーの平均値定理). $f(x),\ g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続かつ開区間 (a,b) で微分可能で $g'(x)\neq 0$ ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))}$$

を満たす $0<\theta<1$ が（少なくとも一つ）存在する.

Proof. 今, $g(b)=g(a)$ ならロールの定理より $g'(a+(b-a)\theta)=0$ となる $0<\theta<1$ が存在するが, $a<a+(b-a)\theta<b$ かつこの区間で $g'(x)\neq 0$ より矛盾. こうして $g(a)\neq g(b)$（ロールの定理の対偶).

$$F(x)=f(x)-f(a)-A\left[g(x)-g(a)\right],\ \text{但し } A=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

とおく. $F(a)=F(b)=0$ よりロールの定理から $F'(a+\theta(b-a))=0$ なる $0<\theta<1$ が少なくとも一つ存在する. $F'(x)=f'(x)-Ag'(x)$ ゆえ,

$$F'(a+\theta(b-a))=0\Longleftrightarrow\frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))}=A=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

注意 6 (ロピタルの定理). $f(x),\ g(x)$ は $0<|x-a|<r$ で微分可能かつ $x=a$ で連続とする. さらに, $f(a)=g(a)=0$ かつ $x\neq a$ ならば $g'(x)\neq 0$ とする. その時,
$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha$ が存在すれば $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して α に等しい. 即ち

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha\Longrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$$

Proof. $f(a)=g(a)=0$ だから, コーシーの平均値の定理から

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a+(x-a)\theta)}{g'(x+(x-a)\theta)}\quad(0<\theta<1)$$

仮定から $x\to a$ の時の右辺の極限値は存在するから, 左辺の極限値も存在して α である. □

$\boxed{\text{問題 4.7}}$

<u>**解答例.**</u> $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\cos t}{1+(\cos t)^{\sin t}}\, dt$ とおく.

$$\begin{aligned}
\therefore\ f'(x) &= \frac{\cos x}{1+(\cos x)^{\sin x}} - (-1)\frac{\cos x}{1+(\cos(-x)^{\sin(-x)})} \\
&= \frac{\cos x}{1+(\cos x)^{\sin x}} + \frac{\cos x}{1+(\cos x^{-\sin x})} \\
&= \cos x \left(\frac{1}{1+(\cos x)^{\sin x}} + \frac{1}{1+(\cos x)^{-\sin x}} \right) \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

$\therefore f(x) = \sin x + C$. $f(0) = 0$ より, $f(x) = \sin x$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = f(\frac{\pi}{4}) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos x}{1+(\cos x)^{\sin x}}\, dx = .$$

<u>**注意**</u> **7.** $F(x) = \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\, dt$ とおく.

$$F'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$$

実際, $f(x)$ の原始関数を $G(x)$ とする. 即ち, $G'(x) = f(x)$. このとき,

$$F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\, dt = \Big[G(x)\Big]_{v(x)}^{u(x)} = G(u(x)) - G(v(x))$$

$$\begin{aligned}
\therefore F'(x) &= G(u(x))' - G(v(x))' = G'(u(x))\, u'(x) - G'(v(x))\, v'(x) \\
&= u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 4.8}}$

<u>**解答例.**</u> $n = N$ のとき a_n は最大とする. この時,

$$a_N \geqq a_{N-1},\ \text{かつ},\ a_N \geqq a_{N+1}$$

$N^2\, 2^{-N} \geqq (N-1)^2\, 2^{-(N-1)} \quad \therefore \quad N^2 - 4N + 2 \leqq 0\ \therefore\ 2-\sqrt{2} \leqq N \leqq 2+\sqrt{2}$

一方,

$N^2\,2^{-N} \geqq (N+1)^2\,2^{-(N+1)} \quad \therefore \quad N^2-2N-1 \leqq 0 \ \therefore\ 1-\sqrt{2} \leqq N$ または $N \geqq 1+\sqrt{2}$

よって,

$$1+\sqrt{2} \leqq N \leqq 2+\sqrt{2}.$$

N は自然数ゆえ，$N=3$. よって，$n=3$ のとき最大値 $a_3=\dfrac{9}{8}$.

注意 8. 整数 n を変数とする関数 $f(n)$ の

(1) 最大値を求める場合は, 不等式 $\underline{f(n) \geqq f(n-1)}$ & $\underline{f(n) \geqq f(n-1)}$

(2) 最小値を求める場合は不等式 $\underline{f(n) \leqq f(n-1)}$ & $\underline{f(n) \leqq f(n+1)}$

から，最大値・最小値を与える整数 n を求め，最小値・最大値を求めるというやり方もあるが，必ずしも有効なテクニックとは限らない．ものにもよるが，やってみる価値はあるかも知れない.