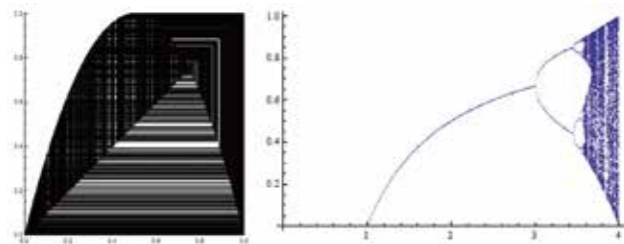


群論

足し算、掛け算、写像の合成など、演算といういろいろありますが、一つの演算だけに注目してその演算で閉じた集合を考えてみましょう。その集合と演算にいくつかの簡単な条件を付けたものが群です。群を用いて具体的な図形や立体、もう少し一般に数学的な対象の対称性を記述することができます。群の性質そのものの研究や群で記述される対称性を調べる研究などがあります。

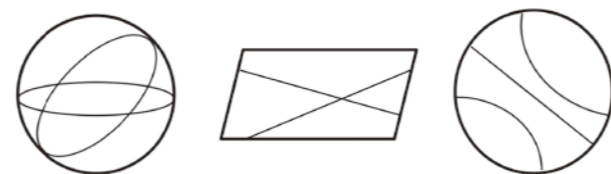
力学系

高校の物理の授業で、物体は運動の法則に従って動くという(ニュートン)力学を学びます。このような一定の法則に従うものの動きを研究する分野のことを力学系といいます。例えば、漸化式で与えられる数列も、一定の規則のよって作られる点列ですから、その振る舞いは力学系の研究対象になります。ここでは、具体的な漸化式 $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ から作られる数列(点列) $\{x_n\}$ を考えてみることにしましょう。2次関数で定義された比較的単純な漸化式であっても、数列 $\{x_n\}$ の振る舞いは大変複雑です。しかも定数 a 、初期値 x_0 をほんの少しでも変えると全く異なる挙動を示すのも不思議で興味深い現象です。左図は、 $a = 4$ 、 $x_0 = 0.5$ のときにパソコンで数列を描かせた図です。折れ線と対角線 $y=x$ との交点達が数列 $\{x_n\}$ に対応しており、 $\{x_n\}$ が区間 $[0, 1]$ の中で「乱雑に」動き回るカオス状態であることがわかります。また右図は、横軸に a 、縦軸を $\{x_n\}$ の値が密集する場所(集積点)を描いたものです。 a を0から4まで増加させたときに、集積点が複雑に変化していく様子が見て取れます。漸化式のように高校で扱う数学でも、振る舞いが分かっていないことも多く、最先端の研究につながっていくのです。



微分幾何学 空間の曲がり具合を見る

よく知られているユークリッド幾何は2000年以上前に形作られました。ごく当たり前と思われる5つの公準に基づいて、私たちが中学校の数学で出会ったであろう図形に関する結果が体系的に解説されています。19世紀に入り、ユークリッド幾何の5つ目の公準である平行線の公準を否定することで、双曲幾何という別の世界が構築されることがわかりました。曲面論に基づいて発生したリーマン幾何はユークリッド幾何、双曲幾何を含む多種多様な空間の幾何の構築を可能にし、その後の空間概念や幾何学思想に大きな影響を及ぼしました。微分幾何学はリーマン幾何をはじめとする様々な幾何を研究する分野です。



球面、平面および双曲平面(円板モデル)における直線(測地線)

代数幾何学

3直線が一点で交わる、という平面幾何の問題があるとしても、純粋に図形的に考えてもよいですが、座標によるアプローチもあります。すなわち、平面に座標を入れ、直線を方程式で表し、方程式を解くことにより交点の座標を計算するという方法です。「方程式を解く」という代数的な考察により、「3直線が一点で交わる」という幾何的な性質が分かるわけです。代数幾何学はこのように、代数的な手法で図形を考察する分野です。直線や曲線だけでなく、曲面やさらに次元の高い図形も研究します。

確率論 自然科学は不規則性の解明にあり

確率論は、ランダムな試行や現象における事象の起こりやすさを「確率」と呼ばれる数で表現し、ランダム性の中に潜む普遍的な性質を研究する数学分野です。確率論では主に、試行や現象における状態が時間とともにランダムに変化していく確率過程と呼ばれるものを研究の対象にします。確率過程の重要な例としては、水面で不規則な動きをする微粒子をモデル化したブラウン運動(ウィーナー過程)が挙げられます。確率過程を調べるために確率解析など多くの理論が開発され、確率論独自の数学の研究が行われています。一方で、自然科学(物理、化学、生物学など)、工学(制御工学など)、社会科学(経済学など)に現れる具体的な現象や問題と深く関わりを持ちながら発展しているのが確率論の特徴です。

解析学

人類は自然の中での存在であり、自然の脅威と恩恵の下で生き続けています。そして人類は知性によって、自然の動きをあらかじめ予測しようと努めてきました。そのための一つの手段は経験を積み重ねて教訓を導くことですが、もう一つ、自然がどのような仕組みで動くのか、そのからくりを見出そうという営みも続けてきました。そのためには、自然の本質は変化ですから、変化をつかまえて記述することが必須です。変化を記述することが可能になったのは、人類が4000年前にそのような営みを始めたのからすると、ごく最近の17世紀(400年前)になってからです。ニュートンとライブニッツが「微分」を発見したのです。微分は変化を表す量で、単に速いか遅いかではなく、どれくらい速いかという変化の様子を定量的に(つまり数値として)表すことができます。さらにニュートンは微分を用いて、万物の運動を支配する「運動法則」を発見しました。これによって、自然の動きは運動方程式と呼ばれる微分方程式を解けばわかる、ということになりました。たとえば太陽の周りを回る惑星の運行は、

$$r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2 = -\frac{GM}{r(t)^2}$$

という微分方程式の解で表されます。また波の伝わり方は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

という微分方程式、熱の伝わり方は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

という微分方程式に支配されます。

このような微分方程式の解は具体的に求められるだろうか、というところから近代の解析学がスタートしました。そのうちに、微分方程式の解は普通は具体的に表すことができない難しい関数になる、ということがわかってきました。そこで解析学のテーマは、微分方程式の解を具体的に求めるといものから、具体的には表せない解がどのような振る舞いをするのかをできる限り記述する、という問題に移りました。

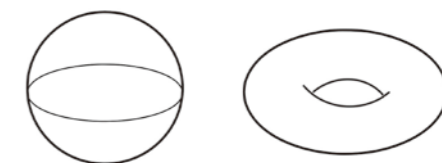
解析学は様々なアイデアや概念を発見して、そのような問題に取り組む学問です。その成果は、星の運行・大気の流れといったような大きなスケールの現象や、素粒子物理学のような極小のスケールの現象、液体の水が固体の氷になるといった相転移現象、あるいは細菌の増殖の仕方など、ほとんどあらゆる自然現象の解明に結びつきます。さらには整数を並べたときに素数が現れる頻度というように、数学的現象の解明にも解析学は活躍します。

表現論

平面ベクトルや空間ベクトルには和とスカラー倍という演算があります。ところで、平面・空間ベクトル以外にも、和とスカラー倍を考えられるものはたくさんあります。現代数学ではこのようなものもベクトルとみなすことがあります。例えば、多項式は多項式同士の和と定数倍ができますので、ベクトルとみなすことが出来ます。そうすることで、ベクトルの回転など、色々な便利な変換が適用できるようになるのです。さらに、多項式のような対象の集まりをベクトルの集まりとみなすことで、対象間のある種の変換の集まりを、座標軸を用いて一斉に「数の表」として表せるようになります。これを「表現」といいます。表現の性質を調べるのが表現論です。特に、ありうる表現を分類したりします。物理学の量子場理論など、数学以外の分野でも広く応用されています。

位相幾何学 連続変形で不変な性質に着目する

正四面体の頂点の数 a 、辺の数 b 、面の数 c はそれぞれ4、6、4です。従って $a-b+c = 4-6+4 = 2$ がわかります。正四面体の代わりに正八面体や正二十面体で同じことを考えてみると、やはり $a-b+c = 2$ がわかります。このように必ず2という数が現れるのは、以上の正多面体の表面は球面を連続変形して得られるからです。それでは幾つかの三角形を組み合わせて一人乗りの浮き袋のような形を作ってみましょう。そのとき、 $a-b+c$ はいくつになるでしょう。これは2にはならず、球面を連続変形によって一人乗りの浮き袋にはできないことの数学的な根拠を与えます。以上のことは Euler-Poincaré の公式とよばれる一般の結果からわかります。位相幾何学は、図形或いは空間の連続変形で不変な性質や連続変形でうつり合わないものの分類について調べる分野です。位相幾何学の基本問題を提示していた Poincaré 予想は、3次元の閉じた空間に関するもので、21世紀に入り解決されました。



球面とトーラス(一人乗りの浮き袋)

組合せ論

数学の原初形態は「モノを数える」ということでしょう。リンゴが三つといった素朴な「集まり」の抽象化として「集合」の概念が生まれ、個数を加えるなどの「演算」を付与することで「群論」などの代数学に成長しました。つまり数え上げの数学である組合せ論は代数学の源泉と言ってもいいでしょう。何かの個数を勘定する、という作業が実は数学の深遠な部分に触れているのだ、という体験を一度でもすればもうあなたは数学の虜になること間違いありません。